О ФОРМУЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ СИММЕТРИЧЕСКИХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Д. Ю. Черухин*

Булевой функцией от n аргументов называется произвольная функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Булева функция называется симметрической, если её значение не изменяется при произвольной биективной перестановке аргументов. Каждой симметрической булевой функции f от n аргументов взаимно-однозначно соответствует её характеристический набор — $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$, в котором f_i является значением функции f на любом наборе, содержащем i единиц. Например, функция голосования Γ_n — это симметрическая функция от n аргументов (n нечётно), характеристический набор которой имеет вид $(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)$, где число нулей равно числу единиц.

Пусть $Б$ — произвольное конечное функционально полное множество булевых функций (такое множество будем называть базисом). Формулами в базисе $Б$ называются следующие и только следующие выражения в алфавите $Б \cup \{x_1, x_2, \ldots\} \cup \{'(', ')', ','\}$:

1) c, если $c \in Б \cap \{0,1\}$;

2) $f(F_1, \ldots, F_k)$, если $f \in Б$, f — функция от k аргументов, и любое из выражений $F_1, \ldots, F_k$ либо является формулой в базисе $Б$, либо принадлежит множеству переменных $\{x_1, x_2, \ldots\}$.

Сложностью формулы называется число вхождений в неё переменных. Сложностью функции f в базисе $Б$ называется минимальная из сложностей формул в базисе $Б$, реализующих функцию f. Сложность функции f в базисе $Б$ обозначим через $L_Б(f)$.

Теорема 1. *Для каждого натурального числа n можно построить такое множество T_n, состоящее только из симметрических функций от n аргументов, что выполнены условия:*

а) $|T_n| \sim 2^{n+1}, n \to \infty$ (т. е. последовательность множеств T_n содержит "почти все" симметрические функции);

б) если n нечтно, то $\Gamma_n \in T_n$;

в) для любого базиса $Б$ существуют такие константы A и B, что для любого числа n и любой функции $f \in T_n$ выполнено неравенство

$$L_Б(f) \geq An \log_2 n + B.$$

В случае, когда $Б$ состоит только из двуместных функций, Теорема была доказана Фишером, Мейером и Патерсоном [1]. Планируется, что статья докладчика с доказательством Теоремы будет опубликована в журнале "Дискретный анализ и исследование операций", Серия 1.

Пользуясь случаем, докладчик выражает благодарность своему учителю по дискретной математике Олегу Борисовичу Лупанову.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99–01–01175), ФЦП "Интеграция" (проект АО–110), Программы "Университеты России" (проект 992206) и Программы поддержки ведущих научных школ РФФИ (проект 00–15–96103).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Fischer M.J., Meyer A.R., Paterson M.S. $\Omega(n \log n)$ lower bounds on length of Boolean formulas. // SIAM J. Comput. 1962. V. 11, N 3. P. 416–427.

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет