УДК 519.714

Многоярусные формулы и другие классы схем

Д. Ю. Черухин

Московский государственный университет

Рассматриваются булевы схемы из функциональных элементов (СФЭ, [1]). СФЭ S называется *k-ярусной* формулой, если в любом ориентированном пути в S содержится не более k узловых вершин (*узловая* вершина — вход схемы или вершина, обладающая ветвлением, бо́льшим 1). Сложностью k-ярусной формулы является сумма ветвлений узловых вершин. Пусть L_B^k — мера сложности функций (вектор-функций) в классе k-ярусных формул в конечном базисе B, $\mathcal{L}_B^k$ — соответствующая функция Шеннона [1].

Теорема 1. $\forall B\ \forall k \geqslant 2\ \mathcal{L}_B^k(n) = \Theta\bigl(\frac{2^n}{n}\bigr)$.

Заметим, что $\mathcal{L}_B^1(n) \sim \frac{2^n}{\log_2 n}$ [1].

Теорема 2. *Пусть F_n — любой из операторов: умножение матриц, умножение многочленов, циклическая свёртка; n — число его входов. Тогда $\forall B\ L_B^2(F_n) = \Omega(n^{3/2})$.*

Теорема 2 может быть обобщена на класс СФЭ глубины 2 в базисе из всех булевых функций. Известные нижние оценки вида $\Omega(n\frac{\ln^2 n}{\ln\ln n})$ следуют из результатов теории графов [3].

Пусть M^* — множество булевых функций, возрастающих или убывающих по каждой переменной. Для мер сложности μ_1, μ_2 обозначим через $\mu_1 \leqslant \mu_2$ отношение частичного порядка $\mu_1 = \mathcal{O}(\mu_2)$.

Теорема 3. *а)* $\forall B \subset M^*\ \exists (k_1, k_2, \dots)\ L_B^{k_1} > L_B^{k_2} > \dots;$

б) $L^1_{\{\&,\vee,\neg\}} > L^2_{\{\&,\vee,\neg\}} > \dots;$

в) $\forall k \geqslant 2\ \exists (B_1, B_2, \dots)\ L^k_{B_1} > L^k_{B_2} > \dots$

Теорема 3 следует из верхних и нижних оценок сложности функции $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$; при $k = 1$ результат п. в) известен [2].

Теорема 4. $\forall B\ \forall k, l\ L_B^k = (L_B^l)^{\mathcal{O}(1)}$.

Также можно показать, что меры сложности формул и контактно-вентильных схем в некотором смысле *слабо* эквивалентны.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 05–01–00994).

[1] Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984.

[2] Черухин Д. Ю. О сравнении булевых базисов. *Докл. РАН.* — 1999. — **367**, 6. — 742–743.

[3] Radhakrishnan J., Ta-Shma A. Tight bounds for depth-two superconcentrators. — В кн.: Proc. 38-th FOCS. — 1997. — 585–594.