Дискретная математика

том 11 выпуск 2 * 1999

УДК 519.6

О предплохих булевых базисах

© 1999 г. Д. Ю. Черухин

В работе изучается сложность реализации булевых функций формулами в различных базисах. С точки зрения сложности почти всех булевых функций базисы в некотором смысле равноправны. В то же время отдельные последовательности функций в одних базисах допускают существенно более простую реализацию, нежели в других. В этой связи интерес представляет такой метод сравнения базисов, который бы учитывал сложность реализации отдельных последовательностей функций. Такой метод был предложен О. Б. Лупановым и затем развит в работах Б. А. Субботовской и В. А. Стеценко.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 99–01–01175, а также Федеральной целевой программы «Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 1997–2000 гг.», проект 2.1–473.

Сформулируем метод сравнения базисов и затем дадим сводку основных полученных результатов.

Пусть имеется счетное множество переменных $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ (переменные x_p и x_q различны тогда и только тогда, когда $p \neq q$). Будем считать, что все рассматриваемые булевы функции зависят от переменных из множества X и только от них. В дальнейшем словом переменная будем называть переменную из множества X, а словом функция булеву функцию. Иногда переменные будем обозначать другими символами (например, латинскими буквами с индексами).

Пусть B — произвольное множество функций. Формулами над множеством B называются следующие выражения и только они (дается индуктивное определение):

χ, где χ — нульместная функция, т.е. константа, 0 или 1, $\chi \in B$;

$f(x_1, \dots, x_n)$, где f — n-местная функция, $n \geqslant 1$, $f \in B$, а $x_1, \dots, x_n$ — переменные;

$f(F_1, \dots, F_n)$, где f — n-местная функция, $n \geqslant 1$, $f \in B$, а каждое выражение F_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, — либо формула над множеством B, либо переменная.

Множество всех функций (булевых) обозначим через P_2. Формулой будем называть формулу над множеством P_2. Базисом будем называть конечное множество функций, формулой над которым выразима любая функция из P_2 (подчеркнем, что независимость базисных функций не предполагается). Примеры базисов: $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$, $B_0 \cup T$, где T — конечное множество функций. Если множество B — базис, то формулу над множеством B будем также называть формулой в базисе B.

Пусть F — произвольная формула, x_i — переменная и $Y \subseteq X$ — множество переменных. Обозначим через $L_{x_i}(F)$ число вхождений в формулу F переменной x_i, а через $L_Y(F)$ обозначим суммарное число вхождений в формулу F всех переменных из множества Y.

Сложностью $L(F)$ формулы F называется суммарное число вхождений всех переменных в формулу F, т.е. $L(F) = L_X(F)$.

Сложностью $L_B(f)$ функции f в базисе B называется наименьшая из сложностей формул в базисе B, реализующих функцию f.

Метод сравнения базисов, предложенный О. Б. Лупановым, основан на следующих отношениях порядка на множестве базисов. Пусть B_1 и B_2 — произвольные базисы, тогда

(a) базис B_1 не хуже базиса B_2, если существует такая положительная константа C, что для любой функции f
$$L_{B_1}(f) \leqslant CL_{B_2}(f);$$

(b) базисы B_1 и B_2 эквивалентны, если B_1 не хуже базиса B_2 и B_2 не хуже базиса B_1;

(c) базис B_1 лучше базиса B_2, если B_1 не хуже базиса B_2, а обратное неверно;

(d) базисы B_1 и B_2 несравнимы, если они не эквивалентны, и ни один из них не лучше другого.

О. Б. Лупанов показал ([3], теорема 2), что любой базис не хуже базиса $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$, и в этом смысле базис B_0 является наихудшим. Б. А. Субботовская показала ([3], теорема 3), что существуют неэквивалентные базисы, а именно, базис $B_0 \cup \{\oplus\}$ лучше базиса B_0. Там же ([3], теорема 5) дан критерий эквивалентности произвольного базиса базису B_0.

Произвольный базис B называется предплохим, если B лучше базиса B_0 и не существует такого базиса B', что B лучше B' и B' лучше B_0. Понятие предплохого базиса ввел В. А. Стеценко в [4]. Там же ([4], теорема 3) дано необходимое условие того, что произвольный базис является предплохим, а также перечислены все возможные кандидаты в предплохие базисы. В. А. Стеценко высказал гипотезу, что данное им необходимое условие является достаточным, т.е. все описанные им базисы являются предплохими. В настоящей работе доказывается гипотеза Стеценко и приводится классификация предплохих базисов с точностью до эквивалентности.

Дадим определения и обозначения, наиболее часто используемые в работе. Остальные определения и обозначения будем приводить по мере необходимости.

Пусть F и G — формулы. Тогда посредством записи $F \equiv G$ обозначим высказывание: формулы F и G реализуют тождественно равные функции; посредством записи $F \doteq G$ обозначим высказывание: формулы F и G совпадают, как выражения (иначе говоря, графически).

Пусть F — произвольная формула. Индуктивно определим понятия внешней функции, подформулы и субформулы формулы F. Формула F имеет ровно одну внешнюю функцию, некоторое множество подформул и некоторое множество субформул.

Если $F \doteq \chi$, $\chi \in \{0, 1\}$, то функция χ является внешней функцией формулы F, единственной подформулой формулы F является F, формула F не имеет субформул.

Если $F = f(x_1, \dots, x_n)$, $f \in P_2$, $x_1, \dots x_n$ — переменные, то функция f является внешней функцией формулы F, единственной подформулой формулы F является F, субформулами формулы F являются выражения $x_1, \dots, x_n$ и только они.

Если $F = f(F_1, \dots, F_n)$, $f \in P_2$, $F_1, \dots, F_n$ — либо формулы, либо переменные, то функция f является внешней функцией формулы F, подформулами формулы F являются F, все подформулы тех выражений из $F_1, \dots, F_n$, которые являются формулами, и только они, субформулами формулы F являются выражения $F_1, \dots, F_n$ и только они.

Если субформула является формулой, то на нее автоматически распространяются понятия сложности, реализуемой функции и множества подформул. Если же субформула является переменной, то считаем, что ее сложность равна единице, реализуемая функция тождественно равна этой переменной, а множество подформул пусто.

В дальнейшем, если формула F записана в виде $f(F_1, \dots, F_n)$, то считаем, что f является внешней функцией формулы F, а $F_1, \dots, F_n$ — субформулы формулы F. Формулу $f(F_1, F_2)$, где f — конъюнкция (дизъюнкция, сумма по модулю два), будем обозначать соответственно $F_1 \,\&\, F_2$ или $F_1 \cdot F_2$ или F_1F_2 ($F_1 \vee F_2$, $F_1 \oplus F_2$), формулу $g(G_1)$, где g — отрицание, будем обозначать $\neg G_1$ или $\overline{G_1}$.

Пусть $\tilde{y} = (x_{j_1}, \dots, x_{j_k})$ — набор переменных, в котором все переменные различны, т.е. $j_p \neq j_q$ при $p \neq q$. Тогда мощностью $|\tilde{y}|$ набора $\tilde{y}$ назовем число переменных, входящих в набор $\tilde{y}$. Например, $|(x_{j_1}, \dots, x_{j_k})| = k$.

Подстановкой констант называется отображение, определенное на некотором конечном множестве переменных, принимающее значения в множестве констант $\{0, 1\}$. Подстановку констант, определенную на множестве $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$, где $i_p \neq i_q$ при $p \neq q$, и сопоставляющую каждой переменной из набора $\tilde{x} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ соответствующую константу из набора $\tilde{c} = (c_1, \dots, c_n)$, будем обозначать $\{\tilde{x} = \tilde{c}\}$, или $\{x_{i_1} = c_1, \dots, x_{i_n} = c_n\}$.

Мощностью $|A|$ подстановки констант A называется мощность ее множества определения, например, $|\{x_{i_1} = c_1, \dots, x_{i_n} = c_n\}| = n$.

Подфункцией функции f называется любая функция, получающаяся из f при фиксации некоторых переменных функции f некоторыми константами. В частности, f является подфункцией функции f. Пусть f — функция и A — подстановка констант, тогда через $f|_A$ обозначим подфункцию функции f, получающуюся фиксацией тех ее переменных, которые входят в множество определения подстановки A, соответствующими константами из A. Если F — формула, то через $F|_A$ обозначим формулу, получающуюся из F заменой в ней всех вхождений тех переменных, которые входят в множество определения подстановки A, соответствующими константами из A (подчеркнем, что никаких дальнейших преобразований полученной формулы не предполагается).

Пусть f — функция, а B — конечное множество функций. Обозначим через $\mathrm{nes}(f)$ число существенных переменных функции f, а через $\mathrm{nes}(B)$ — наибольшее число из множества $\{\mathrm{nes}(f)\colon f \in B\}$. Заметим, что для любого базиса B справедливо неравенство $\mathrm{nes}(B) \geqslant 2$. Обозначим через $M_B(f)$ отношение сложности функции f в базисе B к числу существенных переменных функции f (если последнее не равно нулю).

Пусть F — произвольная формула. Формулу F назовем бесповторной, если каждая существенная переменная функции, реализуемой формулой F, входит в F ровно один раз. Формулу F назовем строго бесповторной, если F бесповторна, каждая пе-

ременная, входящая в F, существенна для функции, реализуемой формулой F, и формула F не содержит констант. Скажем, что функция f бесповторно выражается (реализуется) через множество функций B (в базисе B, если B является базисом), если существует бесповторная формула F над множеством B, реализующая функцию f.

В дальнейшем нам понадобятся предложения 1 и 2, доказанные О. Б. Лупановым ([2], лемма 1, [3], лемма 2, теорема 1]).

Предложение 1. *Константы, функции одного аргумента и нелинейные функции двух аргументов бесповторно выразимы в любом базисе.*

Предложение 2. *Если все функции из базиса B_1 бесповторно выражаются в базисе B_2, и все функции из базиса B_2 бесповторно выражаются в базисе B_1, то базисы B_1 и B_2 эквивалентны.*

Произвольную формулу F назовем элементарной, если эта формула имеет вид $F = f(F_1, \dots, F_n)$, $L(F) \geqslant 2$, и для каждой субформулы F_i выполняется неравенство $L(F_i) \leqslant 1$. Индукцией по построению формулы можно доказать следующее предложение.

Предложение 3. *Любая формула, сложность которой не меньше двух, содержит элементарную подформулу.*

Функции f и g от n аргументов назовем обобщенно однотипными, если существует такая перестановка $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ набора $(1, \dots, n)$ и такие константы $c_0, \dots, c_n$, что справедливо тождество

$$g(x_1, \dots, x_n) \equiv f(x_{\sigma(1)} \oplus c_1, \dots, x_{\sigma(n)} \oplus c_n) \oplus c_0. \tag{1}$$

Отношение обобщенной однотипности является отношением эквивалентности. Заметим, что функции f и g обобщенно однотипны тогда и только тогда, когда функцию g можно получить из f с помощью операций переименования переменных (без отождествления), навешивания отрицаний на некоторые переменные и (возможно) навешивания отрицания на саму функцию. Понятие обобщенной однотипности было введено В. А. Стеценко в [4].

Пусть $f(y_1, \dots, y_n)$ — произвольная функция, $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$, где $y_p \neq y_q$ при $p \neq q$, $Z \subseteq Y$, причем $Z = \{y_{i_1}, \dots, y_{i_k}\}$, где $i_p \neq i_q$ при $p \neq q$, и $Y \setminus Z = \{y_{i_{k+1}}, \dots, y_{i_n}\}$. Пусть также ϕ — произвольная функция k аргументов. Тогда набор $\tilde{y} = (y_{i_1}, \dots, y_{i_k})$ назовем ϕ-выделимым (или выделимым) набором переменных функции f, если существует такая функция ψ, что справедливо тождество

$$f(y_1, \dots, y_n) \equiv \psi(\phi(y_{i_1}, \dots, y_{i_k}), y_{i_{k+1}}, \dots, y_{i_n}). \tag{2}$$

В этом случае множество Z назовем выделимым множеством переменных функции f. Функцию f назовем разделимой, если либо существует такое выделимое множество Z переменных функции f, что $2 \leqslant |Z| < n$, либо функция f несущественно зависит от какой-то переменной из множества Y. Произвольную функцию f, не являющуюся разделимой, назовем неразделимой (в частности, нульместные функции неразделимы). Понятия выделимого множества переменных и разделимой функции рассматривал А. В. Кузнецов в [1].

Исходя из (2), можно показать, что каждая функция, не равная тождественно константе, представима в виде строго бесповторной суперпозиции неразделимых функций, а именно, справедливо следующее предложение.

Предложение 4. *Для любой функции f, не равной тождественно константе, существует такая строго бесповторная формула F, реализующая функцию f, что внешние функции всех подформул формулы F неразделимы.*

Следующее предложение доказывается, исходя из (1) и (2).

Предложение 5. *Если F — строго бесповторная формула, реализующая функцию f, и g — внешняя функция некоторой подформулы формулы F, то g обобщенно однотипна с некоторой подфункцией функции f.*

Определение 1. Базис B назовем нормальным, если выполняются следующие условия:

- все функции из базиса B неразделимы;
- базис B вместе с каждой своей функцией содержит все ее неразделимые подфункции;
- базис B вместе с каждой своей функцией содержит все функции, обобщенно однотипные с ней.

Для каждого базиса B обозначим через $\langle B\rangle$ множество, состоящее из всех таких неразделимых функций f, что f обобщенно однотипна с подфункцией некоторой функции из B. Заметим, что множество $\langle B\rangle$ конечно. Существует алгоритм, который по произвольному базису B, поданному на вход, строит на выходе множество $\langle B\rangle$.

Предложение 6. *Для произвольного базиса B множество $\langle B\rangle$ является нормальным базисом, эквивалентным базису B.*

Доказательство. Покажем, что каждая функция из базиса B выражается бесповторной формулой над множеством $\langle B\rangle$. Рассмотрим произвольную функцию $f \in B$. Множество $\langle B\rangle$ содержит обе константы, поэтому, если функция f тождественно равна константе, то она бесповторно выражается через множество $\langle B\rangle$. Пусть теперь f не равна тождественно константе. Из предложения 4 следует, что существует такая строго бесповторная формула F, реализующая функцию f, что все внешние функции подформул формулы F неразделимы. Тогда, согласно предложению 5, внешняя функция каждой подформулы формулы F обобщенно однотипна с некоторой подфункцией функции f. Итак, внешняя функция каждой подформулы формулы F принадлежит множеству $\langle B\rangle$, т.е. F — бесповторная формула над множеством $\langle B\rangle$, выражающая функцию f.

Мы показали, в частности, что каждая функция из базиса B выразима формулой над множеством $\langle B\rangle$. Отсюда следует, что любая функция из P_2 выразима формулой над множеством $\langle B\rangle$. Кроме того, множество $\langle B\rangle$ конечно. Таким образом, $\langle B\rangle$ — базис. Из построения $\langle B\rangle$ непосредственно видно, что $\langle B\rangle$ — нормальный базис.

Покажем теперь, что любая функция из базиса $\langle B\rangle$ бесповторно выразима в базисе B. Рассмотрим произвольную функцию $g \in \langle B\rangle$. Пусть g зависит от n аргументов. Тогда существует функция $f \in B$, перестановка $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ набора $(1, \dots, n)$ и константы $a_1, \dots, a_n$, $c_0, c_1, \dots, c_n$ такие, что

$$g(x_1, \dots, x_n) \equiv f(a_1x_1 \oplus c_1, \dots, a_nx_n \oplus c_n) \oplus c_0.$$

Из предложения 1 следует, что каждая из функций

$$a_1x_1 \oplus c_1, \dots, a_nx_n \oplus c_n, x_1 \oplus c_0$$

бесповторно выражается в базисе B.

Пусть F_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, — такая бесповторная формула в базисе B, реализующая функцию $a_ix_i \oplus c_i$, что никакая переменная, входящая в F_i и несущественная для функции $a_ix_i \oplus c_i$, не принадлежит множеству $\{x_1, \dots, x_n\}$. Пусть также G — такая бесповторная формула в базисе B, реализующая функцию $x_1 \oplus c_0$, что никакая переменная, входящая в G и отличная от x_1, не принадлежит множеству $\{x_1, \dots, x_n\}$. Подставив в формулу G вместо переменной x_1 формулу $f(F_1, \dots, F_n)$, получим бесповторную формулу в базисе B, реализующую функцию f.

Итак, каждая функция из базиса $\langle B \rangle$ бесповторно выражается в базисе B.

Ранее мы показали, что каждая функция из базиса B бесповторно выражается в базисе $\langle B \rangle$. Согласно предложению 2, базисы B и $\langle B \rangle$ эквивалентны. Предложение 5 доказано.

Пример 1. Рассмотрим базис $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$. Тогда базис $\langle B_0 \rangle$ состоит из 12 функций: двух констант, двух функций одного аргумента и восьми нелинейных функций двух аргументов. Для произвольного базиса B справедливо включение $\langle B_0 \rangle \subseteq \langle B \rangle$.

Замечание 1. Существует алгоритм, позволяющий по произвольному данному базису строить эквивалентный ему нормальный базис. В дальнейшем некоторые теоремы о сравнении базисов будут сформулированы для нормальных базисов. Для применения теоремы такого типа к произвольным базисам достаточно построить нормальные базисы, эквивалентные сравниваемым, и применить эту теорему к построенным нормальным базисам.

Определение 2. Произвольную формулу F назовем приведенной, если

- каждая переменная, входящая в формулу F, существенна для функции, реализуемой формулой F;
- либо формула F состоит из одного символа константы, либо никакая подформула формулы F не реализует функции, тождественно равной константе.

Предложение 7. *Пусть B — произвольный нормальный базис и F — произвольная формула в B. Тогда существует приведенная формула F', удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) *F' является формулой в базисе B;*

(2) *$F' \equiv F$;*

(3) *число вхождений каждой переменной в формулу F' не больше числа вхождений этой переменной в формулу F.*

Доказательство. Если формула F реализует функцию, тождественно равную константе χ, то положим $F' = \chi$. Формула F' является приведенной, все три условия выполнены.

Пусть теперь F реализует функцию f, не равную тождественно константе. Построим последовательность формул $F_0, F_1, \ldots$ В формуле F все вхождения переменных, несущественных для функции f, заменим одинаковыми константами. Полученную формулу примем за F_0. Далее, по каждой формуле F_i построим формулу F_{i+1}. Для этого сначала удалим из формулы F_i все подформулы, реализующие константы, заменив внешние функции объемлющих подформул их подфункциями (сохранив при этом реализуемую функцию), а затем удалим из образовавшейся формулы все разделимые внешние функции, заменив их строго бесповторными суперпозициями неразделимых в соответствии с предложением 4.

Рассмотрим произвольное i. Формула F_i обладает следующими свойствами:

(1) F_i является формулой в базисе B (это следует из построения, определения нормального базиса и предложения 5);

(2) F_i реализует функцию f;

(3) для любой переменной x_j справедливо неравенство $L_{x_j}(F) \geqslant L_{x_j}(F_i)$;

(4) если $i \geqslant 1$, то F_i не содержит констант;

(5) F_i не содержит переменных, несущественных для функции f.

Пусть $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$ — множество натуральных чисел. Рассмотрим множество I, состоящее из всех тех чисел $i \in \mathbf{N}$, для которых формула F_i содержит хотя бы одну подформулу, реализуюшую функцию, тождественно равную константе. Возможны два случая, либо $I \neq \mathbf{N}$, либо $I = \mathbf{N}$. Покажем, что последний случай невозможен. Для произвольного $i \in I$, формула F_i содержит подформулу, реализующую тождественную константу. В силу свойства 4 сложность этой подформулы больше нуля, поэтому $L(F_{i+1}) \leqslant L(F_i) - 1$. Если множество I совпадает с множеством всех натуральных чисел, то индукцией по i доказывается неравенство $L(F_i) \leqslant L(F_1) - (i-1)$, которое неверно для $i = L(F_1) + 2$ в силу неотрицательности сложности.

Итак, существует $i_0 \in \mathbf{N} \setminus I$. Положим $F' = F_{i_0}$. Никакая подформула формулы F' не реализует константу, т.е. выполнено первое условие определения 2. Второе условие определения 2 выполнено в силу свойства 5 формулы F_{i_0}. Таким образом, формула F' является приведенной. В силу свойств 1, 2 и 3 формулы F_{i_0}, формула F' удовлетворяет соответственно трем условиям предложения 5. Предложение 6 доказано.

Пусть F — формула в базисе B. Произвольную приведенную формулу F', обладающую свойствами из предложения 5 назовем приведенной формулой, соответствующей формуле F. Приведенная формула, соответствующая формуле F, существует согласно предложению 6.

Определение 3. Рангом функции f называется наименьшее целое число m, для которого существуют функция $\psi(y_1, \ldots, y_m)$ и линейные функции $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$ такие, что $f = \psi(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)$. Ранг функции f обозначим $r(f)$.

Лемма 1. *Пусть n, k — неотрицательные целые числа, f — произвольная функция, существенно зависящая от $n+k$ аргументов, $\phi(x_1, x_2)$ — произвольная нелинейная функция двух аргументов и*

$$g(x_1, \ldots, x_{n+2k}) = f(\phi(x_1, x_2), \ldots, \phi(x_{2k-1}, x_{2k}), x_{2k+1}, \ldots, x_{n+2k}).$$

Тогда $r(g) \geqslant 2k$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. предположим, что $r(g) < 2k$. Введем обозначения $m = r(g)$, $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n+2k})$. По определению ранга, существует функция $\psi(y_1, \dots, y_m)$ и линейные функции $\Lambda_1(\tilde{x}), \dots, \Lambda_m(\tilde{x})$, такие, что

$$g(\tilde{x}) \equiv \psi(\Lambda_1(\tilde{x}), \dots, \Lambda_m(\tilde{x})).$$

Рассмотрим матрицу M с m строками и $n+2k$ столбцами, в i-й строке которой выписаны коэффициенты линейной функции Λ_i при переменных $x_1, \dots, x_{n+2k}$. Строки матрицы M линейно независимы. В противном случае, если бы какая-то линейная функция Λ_{i_0} линейно выражалась через остальные, то существовала бы функция ψ_1, такая, что

$$g = \psi_1(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{i_0-1}, \Lambda_{i_0+1}, \dots, \Lambda_m)$$

и, тем самым, было бы справедливо неравенство $r(g) < m$. Таким образом, ранг матрицы M равен m. Поэтому в матрице M существует невырожденная подматрица M_1 размера $m \times m$. Пусть $\tilde{z}$ — набор переменных, соответствующих столбцам матрицы M_1. По нашему предположению $|\tilde{z}| < 2k$, поэтому в наборе $(x_1, \dots, x_{2k})$ существует переменная, не входящая в набор $\tilde{z}$. Без ограничения общности можно считать, что это x_1.

Рассмотрим переменную x_2. Она существенна хотя бы для одной из функций $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$. Без ограничения общности можно считать, что она существенна для функции Λ_1. Для любого i, $2 \leqslant i \leqslant m$, положим $a_i = 1$, если переменная x_2 существенна для функции Λ_i, а в противном случае положим $a_i = 0$. Положим $\Lambda'_1 = \Lambda_1$ и $\Lambda'_i = \Lambda_i \oplus a_i\Lambda_1$ для всех $i = 2, \dots, m$. Пусть

$$\psi'(y_1, y_2, \dots, y_m) = \psi(y_1, y_2 \oplus a_2 y_1, \dots, y_m \oplus a_m y_1).$$

Тогда

$$g(\tilde{x}) \equiv \psi'(\Lambda'_1(\tilde{x}), \dots, \Lambda'_m(\tilde{x})), \tag{3}$$

причем $\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_m$ — линейные функции и ни одна из функций $\Lambda'_2, \dots, \Lambda'_m$ существенно не зависит от переменной x_2.

Функция $\psi'(y_1, \dots, y_m)$ существенно зависит от переменной y_1, поэтому существуют константы $b_2, \dots, b_m$ такие, что функция $\psi'(y_1, b_2, \dots, b_m)$ существенно зависит от y_1. Положим $b_1 = 0$ и рассмотрим систему линейных уравнений

$$\Lambda'_i(\tilde{x}) = b_i, \quad i = 1, \dots, m. \tag{4}$$

Заметим, что матрица M' этой системы получается из матрицы M невырожденным линейным преобразованием строк, поэтому ранг матрицы M' равен m, а значит, система (4) совместна. Более того, подматрица M'_1 матрицы M', образованная теми ее столбцами, которые соответствуют переменным из набора $\tilde{z}$, невырождена, так как получается тем же невырожденным преобразованием строк из матрицы M_1. Следовательно, чтобы получить решение системы (4), достаточно произвольно выбрать значения всех переменных, не входящих в набор $\tilde{z}$, а из системы найти значения переменных, входящих в набор $\tilde{z}$.

Переменная x_1 не входит в набор $\tilde{z}$. Ее значение положим равным той константе c_1, для которой функция $\phi(c_1, x_2)$ не зависит от переменной x_2 (это всегда можно сделать, так как ϕ — нелинейная функция двух аргументов). Значения остальных

переменных, не входящих в набор $\tilde{z}$, положим равными нулю и из системы (4) найдем значения переменных, входящих в набор $\tilde{z}$. Полученное решение системы (4) обозначим через $\tilde{c} = (c_1, \dots, c_{n+2k})$. Из условия леммы и соотношений (3) и (4) следует цепочка тождеств

$$\begin{aligned} f(\phi(c_1, x_2), \phi(c_3, c_4), \dots, \phi(c_{2k-1}, c_{2k}), c_{2k+1}, \dots, c_{n+2k}) &\equiv g(c_1, x_2, c_3, \dots, c_{n+2k}) \\ &\equiv \psi'(\Lambda_1'(c_1, x_2, c_3, \dots, c_{n+2k}), \Lambda_2'(\tilde{c}), \dots, \Lambda_m'(\tilde{c})) \\ &\equiv \psi'(x_2 \oplus c_2 \oplus b_1, b_2, \dots, b_m). \end{aligned}$$

В то же время функция, выражаемая формулой

$$f(\phi(c_1, x_2), \phi(c_3, c_4), \dots, \phi(c_{2k-1}, c_{2k}), c_{2k+1}, \dots, c_{n+2k}),$$

тождественно равна константе, а функция, выражаемая формулой

$$\psi'(x_2 \oplus c_2 \oplus b_1, b_2, \dots, b_m),$$

существенно зависит от x_2. Получили противоречие. Лемма 1 доказана.

Определение 4. Пусть f — произвольная функция, существенно зависящая от всех своих n аргументов, и $n \geqslant 2$. Индуктивно определим семейство функций $\{f^{(m)}\}$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, положив

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x_1) &= x_1, \\ f^{(1)}(x_1, \dots, x_n) &= f(x_1, \dots, x_n), \\ f^{(m+1)}(x_1, \dots, x_{n^{m+1}}) &= f(f^{(m)}(x_1, \dots, x_{n^m}), \dots, f^{(m)}(x_{(n-1)n^m+1}, \dots, x_{n^{m+1}})). \end{aligned} \tag{5}$$

Пусть g — подфункция функции $f^{(m)}$ и s — целое неотрицательное число, $s < m$. В силу (5) функция g допускает представление

$$g(\tilde{x}) = f^{(m-s)}(g_1(\tilde{x}_1), \dots, g_{n^{m-s}}(\tilde{x}_{n^{m-s}})),$$

где каждая из функций g_i является подфункцией функции $f^{(s)}$, а каждый набор $\tilde{x}_i$ состоит из всех существенных переменных функции $g(\tilde{x})$, принадлежащих множеству $\{x_{n^s i+1}, \dots, x_{n^s(i+1)}\}$ (набор $\tilde{x}_i$ может быть пустым, каждая переменная входит в набор $\tilde{x}_i$ не более одного раза). Тогда наборы переменных $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n^{m-s}}$ назовем s-наборами переменных функции g. Если $s = m$, то m-набором переменных функции g назовем набор, составленный из всех существенных переменных функции g, взятых по одному разу. Пусть все s-наборы $\tilde{x}_i$ переменных функции g непусты. Тогда s-специальным набором переменных функции g назовем любой набор $(y_1, \dots, y_{n^{m-s}})$, в котором каждая переменная y_i принадлежит s-набору $\tilde{x}_i$.

Функции $f^{(m)}$ рассматривала Б. А. Субботовская в [3]. Там же введены понятия s-набора и s-специального набора для случая $s = 1$.

Определение 5. Пусть g — подфункция функции $f^{(m)}$, $n = \mathrm{nes}(f)$, y — существенная переменная функции g и s — целое цисло, $1 \leqslant s \leqslant m$. Пусть также $\tilde{x}_i$ — тот s-набор переменных функции g, который содержит переменную y (каждая переменная из набора $\tilde{x}_i$ принадлежит множеству $\{x_{n^s i+1}, \dots, x_{n^s(i+1)}\}$). Переменную y назовем s-регулярной, если каждое из множеств

$$\{x_{n^s i+1}, \dots, x_{n^s i+n^{s-1}}\}, \dots, \{x_{n^s i+n^{s-1}(n-1)}, \dots, x_{n^s(i+1)}\}$$

содержит хотя бы одну существенную переменную функции g. Переменную y назовем регулярной, если она s-регулярна для каждого s, $1 \leqslant s \leqslant m$. Существенную переменную функции g, не являющуюся регулярной, назовем особой. Число регулярных переменных функции g обозначим через $R(g)$.

Лемма 2. *Пусть f — нелинейная функция, m — произвольное натуральное число, g — подфункция функции $f^{(m)}$. Тогда*

$$r(g) \geqslant \frac{2}{\mathrm{nes}(f)} R(g).$$

Доказательство. Заметим, что если регулярная переменная функции g входит в какой-то 1-набор переменных функции g, то все переменные из этого набора регулярны для функции g, и этот набор является f-выделимым для функции g. Пусть $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_t$ — все 1-наборы переменных функции g, состоящие из регулярных переменных, а $\tilde{y}$ — набор, состоящий из всех особых переменных функции g. Тогда существует функция ψ такая, что

$$g(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_t, \tilde{y}) \equiv \psi(f(\tilde{x}_1), \dots, f(\tilde{x}_t), \tilde{y}).$$

Функция f нелинейна, поэтому существует такая подстановка констант вместо всех ее переменных, кроме двух, что функция, полученная в результате этой подстановки, будет нелинейной функцией двух аргументов. Эту нелинейную функцию двух аргументов обозначим через ϕ. Таким образом, для любого i, $i = 1, \dots, t$, существует подстановка констант A_i, определенная на всех переменных из набора $\tilde{x}_i$, кроме двух, x_{j_i} и x_{k_i}, такая, что

$$f(\tilde{x}_i)|_{A_i} \equiv \phi(x_{j_i}, x_{k_i}).$$

Положим

$$A = \bigcup_{i=1}^{t} A_i.$$

Тогда

$$g|_A \equiv \psi(\phi(x_{j_1}, x_{k_1}), \dots, \phi(x_{j_t}, x_{k_t}), \tilde{y}).$$

По лемме 1 $r(g|_A) \geqslant 2t$. Очевидно, что $r(g) \geqslant r(g|_A)$. Отсюда окончательно получаем, что

$$r(g) \geqslant r(g|_A) \geqslant 2t = 2\frac{R(g)}{\mathrm{nes}(f)}.$$

Лемма 2 доказана.

Определение 6. Пусть $F = f(F_1, \dots, F_n)$ — произвольная формула. Тогда формулу F назовем ν-формулой, если ни для какой линейной функции Λ не выполняется соотношение

$$F \equiv \Lambda(F_1, \dots, F_n).$$

Пусть F является ν-формулой и $F = f(F_1, \dots, F_n)$. Субформулу F_i формулы F назовем ν-центральной, если F_i не содержит ν-подформул (т.е. подформул, являющихся ν-формулами). Все вхождения переменных в ν-центральные субформулы формулы F назовем ν-центральными вхождениями переменных в формулу

F. Все переменные, имеющие ν-центральные вхождения в формулу F, назовем ν-центральными переменными формулы F.

Формулу F назовем ν-центром, если все ее субформулы ν-центральны. Формулу F назовем ν-псевдоцентром, если все ее субформулы, за исключением одной, ν-центральны, а одна ее субформула не является ν-центральной. Формулу F назовем μ-формулой, если она — либо ν-центр, либо ν-псевдоцентр.

Пусть F — ν-псевдоцентр. Тогда F назовем неотделимым, если существует такая подстановка констант A, определенная только на ν-центральных переменных формулы F, что формула $F|_A$ реализует функцию, тождественно равную константе. В противном случае ν-псевдоцентр F назовем отделимым.

Пусть G — произвольная формула. Обозначим через $\nu(G)$ число ν-подформул формулы G, а через $\mu(G)$ число μ-подформул формулы G.

Лемма 3. *Пусть формула G в базисе B реализует функцию g. Тогда*

$$\nu(G) \geqslant \frac{1}{\mathrm{nes}(B)}(r(g) - 1).$$

Доказательство. Вначале рассмотрим случай, когда формула G является ν-формулой. В этом случае индукцией по $\nu(G)$ докажем, что

$$\nu(G) \geqslant \frac{1}{\mathrm{nes}(B)} r(g). \tag{6}$$

В качестве базиса индукции возьмем $\nu(G) = 1$. Пусть $G = h(H_1, \dots, H_t)$, $h \in B$. Никакая субформула H_i не содержит ν-формул и, следовательно, реализует линейную функцию, которую мы обозначим через Λ_i. Тогда $g = h(\Lambda_1, \dots, \Lambda_t)$, а значит, $r(g) \leqslant t$. Отсюда следует, что

$$\nu(G) = 1 = \frac{\mathrm{nes}(B)}{\mathrm{nes}(B)} \geqslant \frac{t}{\mathrm{nes}(B)} \geqslant \frac{1}{\mathrm{nes}(B)} r(g).$$

Проведем теперь индуктивный переход. Пусть для всех ν-формул G' таких, что $\nu(G') < \nu(G)$, неравенство (6) доказано. Пусть $G = h(H_1, \dots, H_t)$, $h \in B$.

Рассмотрим произвольное i, $1 \leqslant i \leqslant t$. Обозначим через $H_i^1, \dots, H_i^{k_i}$ все различные ν-формулы, входящие в субформулу H_i, максимальные по включению в множестве всех ν-формул, входящих в субформулу H_i (возможно, $k_i = 0$), а через $\tilde{x}_i$ — набор, состоящий из всех переменных, хотя бы одно вхождение которых содержится в субформуле H_i вне каждой из формул $H_i^1, \dots, H_i^{k_i}$. Пусть h_i — функция, реализуемая субформулой H_i, а h_i^j — функция, реализуемая формулой H_i^j, где $j = 1, \dots, k_i$.

Никакая подформула H' субформулы H_i, не содержащаяся ни в одной из формул $H_i^1, \dots, H_i^{k_i}$, не является ν-формулой, следовательно, внешнюю функцию формулы H' можно заменить линейной функцией так, чтобы полученная формула реализовывала ту же функцию, что и формула H'. Поэтому существуют линейные функции Λ_i^1 и Λ_i^2 такие, что

$$h_i = \Lambda_i^1(h_i^1, \dots, h_i^{k_i}) \oplus \Lambda_i^2(\tilde{x}_i).$$

Отсюда следует, что

$$r(h_i) \leqslant \sum_{j=1}^{k_i} r(h_i^j) + 1. \tag{7}$$

Для любого j, $1 \leqslant j \leqslant k_i$, по предположению индукции для формулы H_i^j, справедливо неравенство

$$\nu(H_i^j) \geqslant \frac{1}{\mathrm{nes}(B)} r(h_i^j).$$

Отсюда и из (7) следует, что

$$\nu(H_i) = \sum_{j=1}^{k_i} \nu(H_i^j) \geqslant \frac{1}{\mathrm{nes}(B)} \sum_{j=1}^{k_i} r(h_i^j) \geqslant \frac{1}{\mathrm{nes}(B)} (r(h_i) - 1). \tag{8}$$

Далее, в силу равенства $g = h(h_1, \dots, h_t)$

$$r(g) \leqslant \sum_{i=1}^{t} r(h_i),$$

откуда, с учетом (8) и неравенства $t \leqslant \mathrm{nes}(B)$, заключаем, что

$$\begin{aligned} \nu(G) &= \sum_{i=1}^{t} \nu(H_i) + 1 \geqslant \frac{1}{\mathrm{nes}(B)} \sum_{i=1}^{t} (r(h_i) - 1) + 1 \\ &= \frac{1}{\mathrm{nes}(B)} \sum_{i=1}^{t} r(h_i) + 1 - \frac{t}{\mathrm{nes}(B)} \geqslant \frac{1}{\mathrm{nes}(B)} r(g). \end{aligned}$$

Индукция проведена и неравенство (6) доказано.

Перейдем теперь к доказательству леммы. Обозначим через $H^1, \dots, H^k$ все различные ν-формулы, входящие в формулу G, максимальные по включению в множестве всех ν-формул, входящих в формулу G (возможно, $k = 0$), а через $\tilde{x}$ набор, состоящий из всех переменных, хотя бы одно вхождение которых содержится в формуле G вне каждой из формул $H^1, \dots, H^k$. Пусть h^j — функция, реализуемая формулой H^j, где $j = 1, \dots, k$.

Никакая подформула H' формулы G, не содержащаяся ни в одной из формул $H^1, \dots, H^k$, не является ν-формулой, следовательно, внешнюю функцию формулы H' можно заменить линейной функцией так, чтобы полученная формула реализовывала ту же функцию, что и формула H'. Поэтому существуют линейные функции Λ^1 и Λ^2 такие, что

$$g = \Lambda^1(h^1, \dots, h^k) \oplus \Lambda^2(\tilde{x}).$$

Отсюда следует, что

$$r(g) \leqslant \sum_{j=1}^{k} r(h^j) + 1. \tag{9}$$

Из (6) следует, что

$$\nu(H^j) \geqslant \frac{1}{\mathrm{nes}(B)} r(h^j), \qquad j = 1, \dots, k.$$

Отсюда и из (9) находим, что

$$\nu(G) = \sum_{j=1}^{k} \nu(H^j) \geqslant \frac{1}{\mathrm{nes}(B)} \sum_{j=1}^{k} r(h^j) \geqslant \frac{1}{\mathrm{nes}(B)} (r(g) - 1).$$

Лемма 3 доказана.

Определение 7. Пусть B — произвольный базис, G — произвольная формула в базисе B и P — произвольное подмножество множества подформул формулы G. Определим подмножество μP множества P следующим образом: формула

$$H = h(H_1, \dots, H_t), \quad h \in B, \quad H \in P,$$

принадлежит множеству μP тогда и только тогда, когда среди субформул $H_1, \dots, H_t$ найдутся $t-1$ таких, что никакая из них не содержит подформул, принадлежащих множеству P.

Лемма 4. *Для любого базиса B, любой формулы G в базисе B и любого подмножества P множества подформул формулы G справедливо неравенство*

$$|\mu P| \geqslant \frac{1}{2}|P|. \tag{10}$$

Доказательство. Если $|P| = 0$, то неравенство (10) выполнено. В случае $|P| \geqslant 1$ индукцией по $|P|$ докажем неравенство

$$|\mu P| \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|P|, \tag{11}$$

из которого следует (10).

В качестве базы индукции возьмем случай $|P| = 1$. Пусть $H = h(H_1, \dots, H_t)$, $h \in B$, — та подформула формулы G, которая принадлежит множеству P. Ни одна из субформул $H_1, \dots, H_t$ не содержит подформул, принадлежащих множеству P, поэтому $H \in \mu P$, следовательно,

$$|\mu P| = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|P|.$$

Проведем индуктивный переход. Пусть для всех таких G' и P', что $|P'| < |P|$, неравенство (11) доказано. Пусть $G = h(G_1, \dots, G_t)$, $h \in B$, и, для определенности, субформулы $G_1, \dots, G_k$ содержат подформулы, принадлежащие множеству P (и, следовательно, $G_1, \dots, G_k$ являются формулами), а $G_{k+1}, \dots, G_t$ таковых не содержат. Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant k$, обозначим через P_i пересечение множества P с множеством подформул формулы G_i. К формуле G_i, $i = 1, \dots, k$, применимо предположение индукции, согласно которому

$$|\mu P_i| \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|P_i|. \tag{12}$$

Возможны три случая

$$G \in \mu P,$$
$$G \in P \text{ и } G \notin \mu P,$$
$$G \notin P.$$

В первом случае $0 \leqslant k \leqslant 1$. Отсюда и из (12) следует, что

$$|\mu P| = 1 + \sum_{i=1}^{k} |\mu P_i| \geqslant 1 + \frac{k}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} |P_i|$$
$$\geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{i=1}^{k} |P_i|\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|P|.$$

Во втором случае $k \geqslant 2$. Используя (12), находим, что

$$|\mu P| = \sum_{i=1}^{k} |\mu P_i| \geqslant \frac{k}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} |P_i| \geqslant 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} |P_i|$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{i=1}^{k} |P_i|\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|P|.$$

В третьем случае мы доказываем (11) в предположении, что $|P| \geqslant 1$. Поэтому из условия $G \notin P$ следует, что хотя бы одна из субформул $G_1, \dots, G_t$ содержит подформулу, принадлежащую множеству P, а значит, $k \geqslant 1$. Используя (12), находим, что

$$|\mu P| = \sum_{i=1}^{k} |\mu P_i| \geqslant \frac{k}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} |P_i|$$
$$\geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} |P_i| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|P|.$$

Индукция проведена. Лемма 4 доказана.

Определение 8. Пусть f — произвольная функция, g — подфункция функции $f^{(m)}$ и F — произвольная формула, все переменные которой являются переменными функции g. Тогда формулу F назовем ν_1-формулой, если F является ν-формулой и в формуле F существуют две переменные, входящие в различные 1-наборы переменных функции g.

Пусть F является ν_1-формулой и $F = f(F_1, \dots, F_n)$. Субформулу F_i формулы F назовем ν_1-центральной, если F_i не содержит ν_1-подформул (т.е. подформул, являющихся ν_1-формулами). Все вхождения переменных в ν_1-центральные субформулы формулы F назовем ν_1-центральными вхождениями переменных в формулу F. Все переменные, имеющие ν_1-центральные вхождения в формулу F, назовем ν_1-центральными переменными формулы F.

Формулу F назовем ν_1-центром, если все ее субформулы ν_1-центральны. Формулу F назовем ν_1-псевдоцентром, если все ее субформулы, за исключением одной, ν_1-центральны, а одна ее субформула не является ν_1-центральной. Формулу F назовем μ_1-формулой, если она — либо ν_1-центр, либо ν_1-псевдоцентр.

Пусть F — ν_1-псевдоцентр. Тогда F назовем неотделимым, если существует такая подстановка констант A, определенная только на ν_1-центральных переменных формулы F, что формула $F|_A$ реализует функцию, тождественно равную константе. В противном случае ν_1-псевдоцентр F назовем отделимым.

Пусть G — произвольная формула, все переменные которой являются переменными функции g. Обозначим через $\nu_1(G)$ число ν_1-подформул формулы G, а через $\mu_1(G)$ — число μ_1-подформул формулы G.

Лемма 5. *Пусть B — произвольный нормальный базис, f — нелинейная функция, m — натуральное число, $m \geqslant 2$, g — подфункция функции $f^{(m)}$ и G — формула в базисе B, реализующая функцию g. Тогда*

$$\mu_1(G) \geqslant \frac{1}{2\,\mathrm{nes}(B)\,\mathrm{nes}^2(f)} R(g). \tag{13}$$

Доказательство. Если $R(g) = 0$, то неравенство (13) выполнено. Пусть $R(g) > 0$. В каждом непустом 1-наборе переменных функции g выберем по переменной, и из всех выбранных переменных образуем набор $\tilde{x}$ (так, чтобы номера переменных в наборе $\tilde{x}$ возрастали). Пусть A — подстановка констант, определенная на всех переменных функции g, не входящих в набор $\tilde{x}$, такая, что функция $g|_A$ существенно зависит от всех переменных из набора $\tilde{x}$. Существует набор констант $\tilde{c}$ такой, что функция $g|_A(\tilde{x} \oplus \tilde{c})$ является подфункцией функции $f^{(m-1)}$. Положим $g' = g|_A(\tilde{x} \oplus \tilde{c})$.

Из формулы $G|_A$ заменой некоторых переменных их отрицаниями можно получить формулу G', реализующую функцию g'. В силу нормальности, базис B содержит константы и отрицание, поэтому формула G' является формулой в базисе B. Каждой подформуле H формулы G поставим в соответствие ту подформулу H' формулы G', которая получается из H в результате действия подстановки констант A и замены переменных их отрицаниями в соответствии с набором $\tilde{c}$.

Покажем, что если формула H не является ν_1-формулой, то формула H' не является ν-формулой. Пусть $H = h(H_1, \dots, H_t)$, $h \in B$, и H не является ν_1-формулой. Тогда либо H не является ν-формулой, либо все переменные формулы H принадлежат одному и тому же 1-набору переменных функции g. Если формула H не является ν-формулой, то, очевидно, и формула H' не является ν-формулой.

Пусть теперь все переменные формулы H принадлежат одному и тому же 1-набору переменных функции g. Тогда единственной переменной, которая может входить в формулу H' является та переменная из этого 1-набора, которая вошла в набор $\tilde{x}$. Таким образом, функции, реализуемые формулой H' и субформулами $H'_1, \dots, H'_t$, зависят только от одной, общей для всех них, переменной, поэтому существует такая линейная функция Λ, что

$$H' \equiv \Lambda(H'_1, \dots, H'_t),$$

Это и означает, что формула H' не является ν-формулой.

Итак, мы показали, что если подформула H формулы G не является ν_1-формулой, то соответствующая ей подформула H' формулы G' не является ν-формулой. Заметим, что каждая подформула H^* формулы G' либо имеет вид H' для какой-то подформулы H формулы G, либо получена в результате навешивания отрицания на какую-то переменную. В последнем случае формула H^* не может быть ν-формулой, поэтому любая ν-подформула H^* формулы G' имеет вид H', где H — какая-то ν_1-подформула формулы G. Отсюда следует, что

$$\nu_1(G) \geqslant \nu(G'). \tag{14}$$

Обозначим через P множество всех ν_1-подформул формулы G. Тогда множество μP совпадает с множеством всех μ_1-подформул формулы G. Из леммы 4 следует, что

$$\mu_1(G) = |\mu P| \geqslant \frac{1}{2}|P| = \frac{1}{2}\nu_1(G). \tag{15}$$

Заметим, что если какая-то переменная функции g является регулярной, то все переменные, входящие с ней в один и тот же 1-набор переменных, также регулярны, и та переменная из этого 1-набора, которая попала в набор $\tilde{x}$, является регулярной для функции g'. Отсюда следует, что

$$R(g') \geqslant \frac{1}{\mathrm{nes}(f)} R(g). \tag{16}$$

Мы рассматриваем случай, когда $R(g) > 0$. Тогда в силу (16), $R(g') > 0$, существует хотя бы одна регулярная переменная функции g'. Поэтому в функ g' существует f-выделимый набор переменных. Отсюда и из нелинейности функц f следует, что функция g' нелинейна, а значит,

$$r(g') \geqslant 2. \tag{17}$$

Наконец, применяя (15), (14), лемму 3, (17), лемму 2 и (16), получим, что

$$\begin{aligned}\mu_1(G) &\geqslant \frac{1}{2}\nu_1(G) \geqslant \frac{1}{2}\nu(G') \geqslant \frac{1}{2\,\mathrm{nes}(B)}(r(g')-1)\\ &\geqslant \frac{1}{4\,\mathrm{nes}(B)}r(g') \geqslant \frac{1}{2\,\mathrm{nes}(B)\,\mathrm{nes}(f)}R(g')\\ &\geqslant \frac{1}{2\,\mathrm{nes}(B)\,\mathrm{nes}^2(f)}R(g).\end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

Определение 9. Мерой устойчивости функции f называется наименьшее целое неотрицательное число u, для которого существует подстановка констант A мощности u такая, что функция $f|_A$ тождественно равна константе.

Мера устойчивости любой функции не больше числа ее существенных переменных.

Предложение 8. *Если функция f неразделима и* $\mathrm{nes}(f) \geqslant 3$, *то мера устойчивости функции f не меньше двух.*

Доказательство. Предположим противное: пусть функция $f(x_1, \dots x_n)$ неразделима, $\mathrm{nes}(f) \geqslant 3$, а мера устойчивости функции f не больше одного. Тогда существует подстановка констант $A = \{x_i = c\}$ мощности 1 такая, что функция $f|_A$ тождественно равна константе. Обозначив эту константу через d, получим, что

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv (x_i \oplus c)\ \&\ (f(x_1, \dots, x_{i-1}, \neg c, x_{i+1}, \dots, x_n) \oplus d) \oplus d.$$

Отсюда видно, что набор переменных $\tilde{y} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ функции f выделим. В силу условия леммы $n \geqslant 3$, поэтому $2 \leqslant |\tilde{y}| < |\tilde{x}|$, т.е. функция f разделима. Получили противоречие. Предложение 3 доказано.

Лемма 6. *Пусть f — произвольная функция, $n = \mathrm{nes}(f)$, u — мера устойчивости функции f, $u \geqslant 2$, m — произвольное натуральное число и g — подфункция функции $f^{(m)}$. Пусть также A — произвольная подстановка констант, определенная только на регулярных переменных функции g. Тогда*

(a) $\mathrm{nes}(g) - \mathrm{nes}(g|_A) \leqslant n \cdot |A|^{\log_u n}$;

(b) *если* $\mathrm{nes}(g) > 0$ *и* $|A| < u^m$, *то* $\mathrm{nes}(g|_A) > 0$.

Доказательство. Вначале рассмотрим случай, когда $|A| = 0$. Тогда $g|_A = g$ и, тем самым, оба утверждения тривиально выполнены.

Пусть теперь $|A| \geqslant 1$. В этом случае проведем индукцию по m. В качестве базы нидукции возьмем случай $m = 1$. В силу того, что $|A| \geqslant 1$,

$$\operatorname{nes}(g) - \operatorname{nes}(g|_A) \leqslant \operatorname{nes}(g) \leqslant n \leqslant n|A|^{\log_u n}.$$

Первое утверждение доказано. Докажем второе утверждение. По условию леммы, все переменные из области определения подстановки констант A регулярны для функции g, поэтому, в силу неравенства $|A| \geqslant 1$, существует хотя бы одна регулярная переменная функции g, а значит, $g = f$. Тогда, если $|A| < u$, то, по определению меры устойчивости, функция $f|_A$ тождественно не равна константе, т.е. $\operatorname{nes}(g|_A) = \operatorname{nes}(f|_A) > 0$.

Проведем индуктивный переход. Пусть для всех m' таких, что $m' < m$, лемма доказана. Представим функцию g в виде $g = f(g_1, \dots, g_n)$, где $g_1, \dots, g_n$ — подфункции функции $f^{(m-1)}$. Если какая-то из функций $g_1, \dots, g_n$ тождественно равна константе, то все переменные функции g особые, следовательно, $|A| = 0$, и мы не попадаем в рассматриваемый случай. Поэтому

$$\operatorname{nes}(g_i) > 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{18}$$

Кроме того, множества переменных функций g_i попарно не пересекаются. Отсюда и из (18) следует, что все существенные переменные функций $g_1, \dots, g_n$ существенны для функции g, а значит,

$$\operatorname{nes}(g) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{nes}(g_i). \tag{19}$$

Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, обозначим через A_i сужение подстановки констант A на множество переменных функции g_i. Ясно, что

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|. \tag{20}$$

Рассмотрим произвольное i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Каждая регулярная переменная функции g, являющаяся переменной функции g_i, регулярна для функции g_i. Следовательно, подстановка констант A_i определена только на регулярных переменных функции g_i. Поэтому функция g_i и подстановка констант A_i удовлетворяют предположению индукции. Из предположения индукции и (18) следует, что

$$\operatorname{nes}(g_i) - \operatorname{nes}(g_i|_{A_i}) \leqslant n|A_i|^{\log_u n}, \tag{21}$$

и

$$\text{если } |A_i| < u^{m-1}, \quad \text{то } \operatorname{nes}(g_i|_{A_i}) > 0. \tag{22}$$

Возможны два случая:

(1) среди функций $g_i|_{A_i}$ хотя бы одна тождественно равна константе;

(2) ни одна из функций $g_i|_{A_i}$ тождественно не равна константе.

Рассмотрим первый случай. Пусть i_0 таково, что функция $g_{i_0}|_{A_{i_0}}$ тождественно равна константе, т.е. $\mathrm{nes}(g_{i_0}|_{A_{i_0}}) = 0$. Из (22) следует, что $|A_{i_0}| \geqslant u^{m-1}$. Отсюда заключаем, что

$$\mathrm{nes}(g) - \mathrm{nes}(g|_A) \leqslant n^m = n(u^{m-1})^{\log_u n} \leqslant n|A_{i_0}|^{\log_u n} \leqslant n|A|^{\log_u n}.$$

Неравенство (a) доказано. Докажем утверждение (b).

Пусть $|A| < u^m$. Тогда в силу (20) количество тех подстановок констант A_i, для которых $|A_i| \geqslant u^{m-1}$, меньше, чем u. Согласно (22), если $|A_i| < u^{m-1}$, то функция $g_i|_{A_i}$ тождественно не равна константе. Поэтому число тех функций $g_i|_{A_i}$, которые тождественно равны константе, меньше, чем u. Кроме того, $g|_A = f(g_1|_{A_1}, \dots, g_n|_{A_n})$ и множества переменных функций $g_i|_{A_i}$ попарно не пересекаются. Отсюда и из определения меры устойчивости следует, что функция $g|_A$ тождественно не равна константе, т.е. $\mathrm{nes}(g|_A) > 0$. Первый случай рассмотрен.

Во втором случае все существенные переменные функций $g_1|_{A_1}, \dots, g_n|_{A_n}$ существенны для функции $g|_A$, поэтому

$$\mathrm{nes}(g|_A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{nes}(g_i|_{A_i}). \tag{23}$$

Отсюда и из условия, выделяющего второй случай следует, что $\mathrm{nes}(g|_A) > 0$, а значит, утверждение (b) тривиально выполнено.

Наконец, используя (19), (23), (21), неравенство

$$x^p + y^p \leqslant (x+y)^p, \qquad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad p \geqslant 1$$

и (20), получим, что

$$\begin{aligned}\mathrm{nes}(g) - \mathrm{nes}(g|_A) &= \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{nes}(g_i) - \mathrm{nes}(g_i|_{A_i})) \\ &\leqslant n \sum_{i=1}^{n} |A_i|^{\log_u n} \leqslant n \left(\sum_{i=1}^{n} |A_i| \right)^{\log_u n} = n|A|^{\log_u n}.\end{aligned}$$

Второй случай также рассмотрен. Лемма 6 доказана.

Определение 10. Пусть B — произвольный базис, F — формула в B и x_i — переменная. Скажем, что формула F в базисе B упрощается по переменной x_i, если существует такая формула F' в базисе B, что

- $F' \equiv F$;
- число вхождений каждой переменной в формулу F' не больше числа вхождений этой переменной в формулу F;
- число вхождений переменной x_i в формулу F' меньше числа ее вхождений в формулу F.

Формулу F' назовем результатом упрощения формулы F по переменной x_i.

Следующее определение мы назовем основным определением.

Определение 11. Пусть B — произвольный нормальный базис, f — произвольная функция. Скажем, что функция f и базис B согласованы, если для любого натурального m, $m \geqslant 2$, для любой подфункции g функции $f^{(m)}$ и для любой приведенной формулы H в базисе B, если все переменные формулы H являются переменными функции g, формула H является либо ν_1-центром, либо отделимым ν_1-псевдоцентром, и все ν_1-центральные переменные формулы H регулярны для функции g, то существует подстановка констант A, определенная только на ν_1-центральных переменных формулы H, и существует переменная x_i такая, что функция $g|_A$ существенно зависит от x_i, а формула $H|_A$ в базисе B упрощаема по x_i.

Следующую лемму мы называем основной леммой.

Лемма 7. *Пусть B — нормальный базис, f — нелинейная функция, причем f и B согласованы. Пусть $n = \mathrm{nes}(f)$, u — мера устойчивости функции f, $u \geqslant 2$, m, s — натуральные числа, $s < m$, и выполнено условие*

$$u^{s \log_n u - 1} > 8\,\mathrm{nes}(B) n^2 M_B(f^{(m)}). \tag{24}$$

Тогда

$$M_B(f^{(m-s)}) \leqslant M_B(f^{(m)}) - \frac{1}{2n^s}.$$

Доказательство. Пусть F — формула в базисе B, реализующая функцию $f^{(m)}$ со сложностью

$$L(F) = M_B(f^{(m)}) n^m. \tag{25}$$

Обозначим через a число s-наборов переменных функции $f^{(m)}$, каждый из которых содержит какие-то две переменные, входящие в формулу F различное число раз. Положим

$$T = \max\left\{0,\ \left\lceil \frac{1}{n^s}\left(\frac{n^{m-s}}{2} - a\right)\right\rceil\right\}. \tag{26}$$

Для каждого t, $t = 0, 1, \ldots, T$ построим подфункцию g_t функции $f^{(m)}$ и приведенную формулу G_t в базисе B, реализующую функцию g_t так, чтобы выполнялись следующие условия (27) и (28):

– каждый s-набор переменных функции g_t имеет мощность, равную либо 1, либо n^s, причем число s-наборов, имеющих мощность 1, не превосходит

$$a + n^s t; \tag{27}$$

– для каждого s-специального набора $\tilde{x}$ переменных функции g_t

$$L_{\tilde{x}}(G_t) \leqslant \frac{1}{n^s}(L(F) - a) - t. \tag{28}$$

Построение будем вести индукцией по t.

Начнем с построения g_0 и G_0. Обозначим последовательно через $\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_a$ все те s-наборы переменных функции $f^{(m)}$, каждый из которых содержит две переменные,

входящие в формулу F различное число раз, а через $\tilde{w}_{a+1}, \dots, \tilde{w}_{n^{m-s}}$ обозначим все оставшиеся s-наборы переменных функции $f^{(m)}$. Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant a$, обозначим через x_{k_i} какую-нибудь переменную из набора $\tilde{w}_i$, число вхождений которой в формулу F не больше числа вхождений в формулу F любой другой переменной из набора $\tilde{w}_i$. Положим $\tilde{z} = (x_{k_1}, \dots, x_{k_a})$. Обозначим через C подстановку констант, определенную на всех переменных, входящих в наборы $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_a$, кроме тех из них, которые входят в набор $\tilde{z}$, такую, что функция $f^{(m)}|_C$ существенно зависит от всех переменных из набора $\tilde{z}$.

Положим $g_0 = f^{(m)}|_C$. В качестве G_0 возьмем приведенную формулу, соответствующую формуле $F|_C$. Проверим, что для g_0 и G_0 выполняются условия (27) и (28). Все s-наборы переменных функции g_0 суть

$$(x_{k_1}), \dots, (x_{k_a}), \quad \tilde{w}_{a+1}, \dots, \tilde{w}_{n^{m-s}},$$

т.е. каждый s-набор имеет мощность, равную либо 1, либо n^s. Число a_0 тех s-наборов, которые имеют мощность 1, равно $a_0 = a = a + n^s 0$. Условие (27) проверено.

Рассмотрим произвольный s-специальный набор $\tilde{x}$ переменных функции g_0. Набор $\tilde{x}$ включает в себя все переменные из набора $\tilde{z}$. При каждом i, $1 \leqslant i \leqslant a$, набор $\tilde{w}_i$ содержит переменную, число вхождений которой в формулу F больше, чем число вхождений в формулу F переменной x_{k_i}, поэтому

$$L_{\tilde{w}_i}(F) \geqslant n^s L_{x_{k_i}}(F) + 1 = n^s L_{x_{k_i}}(G_0) + 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant a. \tag{29}$$

Для каждого i, $a + 1 \leqslant i \leqslant n^{m-s}$, обозначим через x_{k_i} ту переменную, которая входит и в набор $\tilde{x}$, и в набор $\tilde{w}_i$. Ясно, что

$$L_{\tilde{w}_i}(F) = n^s L_{x_{k_i}}(F) = n^s L_{x_{k_i}}(G_0), \quad a + 1 \leqslant i \leqslant n^{m-s}. \tag{30}$$

Суммируя (29) и (30) по всем i, $1 \leqslant i \leqslant n^{m-s}$, получим, что

$$L(F) = \sum_{i=1}^{n^{m-s}} L_{\tilde{w}_i}(F) \geqslant n^s \sum_{i=1}^{n^{m-s}} L_{x_{k_i}}(G_0) + a = n^s L_{\tilde{x}}(G_0) + a.$$

Отсюда, окончательно, получим, что

$$L_{\tilde{x}}(G_0) \leqslant \frac{1}{n^s}(L(F) - a) - 0,$$

т.е. условие (28) проверено.

Пусть g_t и G_t уже построены. Проведем построение g_{t+1} и G_{t+1}. Заметим, что $t + 1 \leqslant T$ и $t \geqslant 0$, следовательно, $T > 0$, а значит, по определению (26),

$$T = \left\lceil \frac{1}{n^s}\left(\frac{n^{m-s}}{2} - a\right)\right\rceil \leqslant \frac{1}{n^s}\left(\frac{n^{m-s}}{2} - a\right) + 1. \tag{31}$$

Функция g_t удовлетворяет условию (27), поэтому число a_t тех s-наборов переменных функции g_t, которые имеют мощность 1, можно оценить, используя (31), следующим образом:

$$a_t \leqslant a + n^s t \leqslant a + n^s(T - 1) \leqslant a + \frac{n^{m-s}}{2} - a = \frac{n^{m-s}}{2}. \tag{32}$$

Тогда число s-наборов, имеющих мощность n^s, не меньше, чем $n^{m-s}/2$. Все переменные, входящие в s-наборы, которые имеют мощность n^s, регулярны для функции g_t. Поэтому

$$R(g_t) \geqslant n^s \frac{n^{m-s}}{2} = \frac{1}{2} n^m. \tag{33}$$

По условию леммы $s < m$, а тогда $m \geqslant 2$. Применяя к функции g_t и формуле G_t лемму 5 и используя (33), получим, что

$$\mu_1(G_t) \geqslant \frac{1}{2\,\mathrm{nes}(B)\,\mathrm{nes}^2(f)} R(g_t) = \frac{1}{2\,\mathrm{nes}(B) n^2} R(g_t) \geqslant \frac{n^m}{4\,\mathrm{nes}(B) n^2}. \tag{34}$$

Обозначим через μ_t^* множество, состоящее из всех тех μ_1-подформул H формулы F, которые удовлетворяют следующим условиям (35) и (36):

все ν_1-центральные переменные формулы H регулярны для функции g_t; (35)

число ν_1-центральных переменных формулы H меньше, чем $u^{s \log_n u - 1}$. (36)

Докажем, что множество μ_t^* непусто. Обозначим через μ_t^{**} и μ_t^{***} множества, состоящие из всех тех μ_1-подформул формулы G_t, которые не удовлетворяют условиям (35) и (36) соответственно. Тогда

$$|\mu_t^*| \geqslant \mu_1(G_t) - |\mu_t^{**}| - |\mu_t^{***}|. \tag{37}$$

Оценим $|\mu_t^{**}|$ и $|\mu_t^{***}|$. Заметим, что любое вхождение переменной в формулу G_t является ν_1-центральным вхождением не более, чем для одной μ_1-подформулы формулы G_t. Поэтому число тех μ_1-подформул, которые не удовлетворяют условию (35), не больше, чем общее число вхождений в формулу G_t всех особых переменных функции g_t. Заметим, что особые переменные функции g_t — это в точности те переменные, которые образуют s-наборы, имеющие мощность 1. Рассмотрим произвольный s-специальный набор $\tilde{x}$ переменных функции g_t. Все особые переменные функции g_t входят в набор $\tilde{x}$, поэтому, используя (28), находим, что

$$|\mu_t^{**}| \leqslant L_{\tilde{x}}(G_t) \leqslant \frac{1}{n^s}(L(F) - a) - t \leqslant \frac{1}{n^s} L(F). \tag{38}$$

Оценим $|\mu_t^{***}|$. Для любого b, количество тех μ_1-подформул H формулы G_t, для которых число ν_1-центральных вхождений переменных в формулу H не меньше b, само не больше, чем $L(G_t)/b$, поэтому

$$|\mu_t^{***}| \leqslant \frac{L(G_t)}{u^{s \log_n u - 1}}. \tag{39}$$

Из (28) следует, что для любого s-специального набора $\tilde{x}$ переменных функции g_t справедливо неравенство

$$L_{\tilde{x}}(G_t) \leqslant \frac{1}{n^s} L(F).$$

Поэтому

$$L(G_t) \leqslant n^s \frac{1}{n^s} L(F) = L(F).$$

Отсюда и из (39) следует, что

$$|\mu_t^{***}| \leqslant \frac{L(F)}{u^{s\log_n u-1}}. \tag{40}$$

Подставляя в (37) оценки (34), (38) и (40), получим, что

$$|\mu_t^*| \geqslant \frac{n^m}{4\,\mathrm{nes}(B)n^2} - \frac{1}{n^s}L(F) - \frac{1}{u^{s\log_n u-1}}L(F).$$

Пользуясь неравенством $n^s \geqslant u^{s\log_n u-1}$, которое следует из неравенства $u \leqslant n$, и равенством (25) и продолжая оценку, находим, что

$$\begin{aligned}|\mu_t^*| &\geqslant \frac{n^m}{4\,\mathrm{nes}(B)n^2} - \frac{2}{u^{s\log_n u-1}}n^m M_B(f^{(m)})\\ &= \frac{n^m}{4\,\mathrm{nes}(B)n^2u^{s\log_n u-1}}(u^{s\log_n u-1} - 8\,\mathrm{nes}(B)n^2M_B(f^{(m)})) > 0.\end{aligned}$$

При выводе последнего неравенства мы воспользовались неравенством (24).

Итак, множество μ_t^* непусто. Обозначим через H_t какую-нибудь μ_1-подформулу формулы G_t, удовлетворяющую условиям (35) и (36). Ниже мы рассмотрим несколько случаев и в каждом из них определим подстановку констант A_t и переменную x_{j_t}, которые удовлетворяют условиям (41), (42) и (43):

$$\text{функция } g_t|_{A_t} \text{ существенно зависит от переменной } x_{j_t}\text{, а формула } G_t|_{A_t} \text{ в базисе } B \text{ упрощаема по переменной } x_{j_t}; \tag{41}$$

$$A_t \text{ определена только на регулярных переменных функции } g_t; \tag{42}$$

$$|A_t| < u^s. \tag{43}$$

Обозначим через Y_t множество всех переменных, входящих в формулу H_t. Возможны три случая:

(1) формула H_t является либо ν_1-центром, либо отделимым ν_1-псевдоцентром;

(2) формула H_t является неотделимым ν_1-псевдоцентром, и либо в формулу H_t входит особая переменная функции g_t, либо $|Y_t| \geqslant u^s$;

(3) формула H_t является неотделимым ν_1-псевдоцентром, все переменные, входящие в формулу H_t, регулярны для функции g_t, и $|Y_t| < u^s$.

Рассмотрим первый случай. По условию леммы, функция f и базис B согласованы. Из определения согласованности следует, что существует подстановка констант A', определенная только на ν_1-центральных переменных формулы H_t и существует переменная x_i' такая, что функция $g_t|_{A'}$ существенно зависит от переменной x_i', а формула $G_t|_{A'}$ в базисе B упрощаема по x_i'. Положим $A_t = A'$, $x_{j_t} = x_i'$. Из вышеизложенного сразу следует (41). Из условия (35) следует, что все ν_1-центральные переменные формулы H_t регулярны для функции g_t, а значит, справедливо (42). Из (36) следует, что количество ν_1-центральных переменных формулы H_t меньше, чем $u^{s\log_n u-1}$, поэтому в силу неравенства $u \leqslant n$

$$|A_t| < u^{s\log_n u-1} \leqslant u^s,$$

т.е. справедливо (43). Первый случай рассмотрен.

Рассмотрим второй случай. По определению неотделимого ν_1-псевдоцентра, существует подстановка констант A'', определенная только на ν_1-центральных переменных формулы H_t, такая, что формула $H_t|_{A''}$ реализует константу. Положим $A_t = A''$. Из определения A_t и условий (35) и (36) следуют, соответственно, условия (42) и (43). Остается определить x_{j_t} и проверить условие (41). Возможны два случая: либо формула H_t содержит особую переменную функции g_t, либо $|Y_t| \geqslant u^s$.

Если формула H_t содержит особую переменную, то выберем в качестве x_{j_t} эту особую переменную. Мы знаем, что $|A_t| < u^s$. Поэтому в каждом s-наборе переменных функции g_t содержится меньше, чем u^s, переменных из области определения подстановки констант A_t. Кроме того, A_t определена только на регулярных переменных функции g_t, а всякий s-набор переменных функции g_t, состоящий из регулярных переменных, является $f^{(s)}$-выделимым для функции g_t. Тогда в силу второго пункта леммы 6, примененного к функции $f^{(s)}$, являющейся своей подфункцией, каждый s-набор переменных функции $g_t|_{A_t}$, получающийся из $f^{(s)}$-выделимого s-набора переменных функции g_t при подстановке констант A_t, непуст. Поэтому все s-наборы переменных функции $g_t|_{A_t}$ непусты. В частности, функция $g_t|_{A_t}$ существенно зависит от всех особых переменных функции g_t, а значит, и от переменной x_{j_t}. Очевидно, что формула $H_t|_{A_t}$ в базисе B упрощаема по переменной x_{j_t}. Таким образом, в этом случае (41) выполнено.

Если $|Y_t| \geqslant u^s$, то из первого пункта леммы 6 следует, что

$$\operatorname{nes}(g_t) - \operatorname{nes}(g_t|_{A_t}) \leqslant n|A_t|^{\log_u n} < n(u^{s\log_n u-1})^{\log_u n} = nu^{s-\log_u n} = u^s. \qquad (44)$$

Все переменные из множества Y_t являются существенными для функции g_t, выполнено неравенство $|Y_t| \geqslant u^s$ и (44), следовательно, существует переменная из множества Y_t, существенная для функции $g_t|_{A_t}$. Эту переменную мы и выберем в качестве x_{j_t}. Очевидно, что формула $H_t|_{A_t}$ в базисе B упрощаема по переменной x_{j_t}, т.е. и в этом случае (41) выполнено. Второй случай рассмотрен.

Рассмотрим, наконец, третий случай. Формула H_t является ν_1-псевдоцентром, следовательно, существует подформула H'_t формулы H_t, являющаяся ν_1-центром. Из условия, определяющего третий случай, следует, что все переменные, входящие в формулу H'_t, регулярны для функции g_t, и их количество не превосходит u^s. По определению согласованности функции f и базиса B, существует подстановка констант A''', определенная только на переменных, входящих в формулу H'_t, и существует переменная x'''_i такая, что функция $g_t|_{A'''}$ существенно зависит от x'''_i, а формула $H'_t|_{A'''}$ в базисе B упрощаема по переменной x'''_i. Положим $A_t = A'''$, $x_{j_t} = x'''_i$. Условие (41) выполнено. Из условия, выделяющего третий случай, и выбора формулы H'_t следуют (42) и (43). Третий случай также рассмотрен.

Во всех трех случаях мы выбрали подстановку констант A_t и переменную x_{j_t} так, чтобы выполнялись (41), (42), и (43). Обозначим через W_t множество, состоящее из всех тех s-наборов переменных функции g_t, которые содержат переменные, входящие в область определения подстановки констант A_t, а также из s-набора, содержащего переменную x_{j_t}. Далее, обозначим через W'_t множество, состоящее из всех тех s-наборов переменных функции $g_t|_{A_t}$, в которые переходят s-наборы из множества W_t при подстановке констант A_t.

Из второго пункта леммы 6, в силу (42) и (43), следует, что каждый из s-наборов функции g_t, пересекающийся с областью определения подстановки констант A, переходит в непустой s-набор функции $g_t|_{A_t}$. Из (41) следует, что тот s-набор функции

g_t, который содержит переменную x_{j_t}, также переходит в непустой s-набор функции $g_t|_{A_t}$. Итак, все s-наборы из множества W'_t непусты.

В каждом наборе из множества W'_t выберем по переменной таким способом, чтобы среди выбранных переменных присутствовала переменная x_{j_t}. Из всех выбранных переменных образуем набор $\tilde{z}_t$. Обозначим через B_t подстановку констант, определенную на всех переменных, входящих в наборы из множества W'_t, кроме тех переменных, которые входят в набор $\tilde{z}_t$, причем такую, что функция $g_t|_{(A_t \cup B_t)}$ существенно зависит от всех переменных из набора $\tilde{z}_t$.

Положим $g_{t+1} = g_t|_{(A_t \cup B_t)}$. Согласно (41), формула $G_t|_{A_t}$ в базисе B упрощается по переменной x_{j_t}. Формулу, полученную после этого упрощения, обозначим через G'_t. Ясно, что

$$L_{x_{j_t}}(G'_t) \leqslant L_{x_{j_t}}(G_t) - 1. \tag{45}$$

В качестве G_{t+1} возьмем приведенную формулу, соответствующую формуле $G'_t|_{B_t}$.

Покажем, что для выбранных g_{t+1} и G_{t+1} выполнены условия (27) и (28). Каждый s-набор переменных функции g_{t+1} либо состоит из одной переменной, входящей в набор $\tilde{z}_t$, либо является s-набором переменных функции g_t. В любом случае s-набор переменных функции g_{t+1} имеет мощность, равную либо 1, либо n^s. Количество a_t тех s-наборов, которые имеют мощность 1, оценивается, с учетом условия (27) для функции g_t, выбора набора $\tilde{z}_t$ и (43), следующим образом:

$$a_t \leqslant a + n^s t + |\tilde{z}_t| \leqslant a + n^s t + |A_t| + 1 \leqslant a + n^s t + (u^s - 1) + 1 \leqslant a + n^s(t+1).$$

Условие (27) проверено. Проверим выполнение условия (28). Рассмотрим произвольный s-специальный набор $\tilde{x}$ переменных функции g_{t+1}. Набор $\tilde{x}$ является также s-специальным набором переменных функции g_t. Кроме того, набор $\tilde{x}$ содержит переменную x_{j_t}. Поэтому из (45) и условия (28) для функции g_t следует, что

$$L_{\tilde{x}}(G_{t+1}) \leqslant L_{\tilde{x}}(G_t) - 1 \leqslant \frac{1}{n^s}(L(F) - a) - (t+1).$$

Все условия проверены, требуемые функция g_{t+1} и формула G_{t+1} построены.

Завершим доказательство основной леммы. Мы построили функцию g_T и формулу G_T, удовлетворяющие условиям (27) и (28). Из (27) следует, что существует s-специальный набор $\tilde{x}$ переменных функции g_T. Используя (28) и (26), получим, что

$$\begin{aligned} L_{\tilde{x}}(G_T) &\leqslant \frac{1}{n^s}(L(F) - a) - T \leqslant \frac{1}{n^s}(L(F) - a) - \frac{1}{n^s}\left(\frac{n^{m-s}}{2} - a\right) \\ &= \frac{1}{n^s}\left(L(F) - \frac{n^{m-s}}{2}\right). \end{aligned} \tag{46}$$

Пусть A^* — подстановка констант, определенная на всех переменных функции g_T, не входящих в набор $\tilde{x}$, такая, что функция $g_T|_{A^*}$ отличается от функции $f^{(m-s)}$ заменой некоторых переменных их отрицаниями. В силу нормальности базиса B, справедливо равенство $L_B(g_T|_{A^*}) = L_B(f^{(m-s)})$. Отсюда, из (46) и из (25) следует, что

$$\begin{aligned} M_B(f^{(m-s)}) &= \frac{L_B(f^{(m-s)})}{n^{m-s}} = \frac{L_B(g_T|_{A^*})}{n^{m-s}} \leqslant \frac{L(G_T|_{A^*})}{n^{m-s}} = \frac{L_{\tilde{x}}(G_T)}{n^{m-s}} \\ &\leqslant \frac{L(F)}{n^m} - \frac{1}{2n^s} = M_B(f^{(m)}) - \frac{1}{2n^s}. \end{aligned}$$

Основная лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть B — нормальный базис, f — нелинейная функция, причем f и B согласованы. Пусть также $n = \operatorname{nes}(f)$, u — мера устойчивости функции f и $u \geqslant 2$. Тогда для любого натурального m, $m \geqslant n$,*

$$M_B(f^{(m)}) \geqslant C\left(\frac{m}{\log_n m}\right)^{\gamma},$$

где

$$C = \frac{1}{8\operatorname{nes}(B)n^4}, \qquad \gamma = \frac{1}{1+\log_u^2 n}$$

зависят только от f и B.

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть в условиях леммы выполняется неравенство

$$M_B(f^{(m)}) < C\left(\frac{m}{\log_n m}\right)^{\gamma}. \tag{47}$$

Положим

$$s_0 = \min\{s \in N \mid u^{s\log_n u - 1} > 8\operatorname{nes}(B)n^2 M_B(f^{(m)})\}, \tag{48}$$

$$T = \max\{t \in N \cup \{0\} \mid m - ts_0 > 0\}. \tag{49}$$

Применив T раз основную лемму, получим, что

$$M_B(f^{(m-Ts_0)}) \leqslant M_B(f^{(m)}) - T\frac{1}{2n^{s_0}}. \tag{50}$$

Из (48), (47) и определения C следует, что

$$\begin{aligned} u^{(s_0-1)\log_n u - 1} &\leqslant 8\operatorname{nes}(B)n^2 M_B(f^{(m)}) \\ &< 8\operatorname{nes}(B)n^2 \frac{1}{8\operatorname{nes}(B)n^4}\left(\frac{m}{\log_n m}\right)^{\gamma} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{m}{\log_n m}\right)^{\gamma}. \end{aligned}$$

Умножая обе части этого неравенства на $u^{\log_n u+1}$, затем возводя их в степень $\log_u^2 n$ и используя неравенство $u \leqslant n$, получим, что

$$n^{s_0} \leqslant \left(\frac{u^{\log_n u+1}}{n^2}\right)^{\log_u^2 n}\left(\frac{m}{\log_n m}\right)^{\gamma\log_u^2 n} \leqslant \left(\frac{m}{\log_n m}\right)^{\gamma\log_u^2 n}. \tag{51}$$

Из неравенства $m \geqslant n$ следует, что $\log_n \log_n m \geqslant 0$, поэтому, логарифмируя обе части неравенства (51) и раскрывая определение γ, получим, что

$$s_0 \leqslant \gamma\log_u^2 n(\log_n m - \log_n\log_n m) \leqslant \frac{\log_u^2 n}{1+\log_u^2 n}\log_n m \leqslant \log_n m. \tag{52}$$

Из (49) следует, что $m - (T+1)s_0 \leqslant 0$, а значит,

$$T \geqslant \frac{m}{s_0} - 1. \tag{53}$$

В силу выбора T справедливо неравенство $m - Ts_0 > 0$, и значит $M_B(f^{(m-Ts_0)}) \geqslant 1$. Используя это неравенство, а также (50)– (53) и определения C и γ, находим, что

$$M_B(f^{(m)}) \geqslant M_B(f^{(m-Ts_0)}) + \frac{T}{2n^{s_0}} \geqslant 1 + \left(\frac{m}{s_0} - 1\right)\frac{1}{2n^{s_0}} \geqslant \frac{m}{2s_0 n^{s_0}}$$
$$\geqslant \frac{m}{2\log_n m(m/\log_n m)^{\gamma \log_u^2 n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{\log_n m}\right)^{1-\gamma\log_u^2 n}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m}{\log_n m}\right)^{\gamma} \geqslant C\left(\frac{m}{\log_n m}\right)^{\gamma},$$

а это противоречит (47). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть B_1, B_2 — произвольные нормальные базисы и пусть существует нелинейная функция f, мера устойчивости которой не меньше двух, такая, что f бесповторно выражается в базисе B_1 и f согласована с базисом B_2. Тогда либо базис B_1 лучше, чем B_2, либо базисы B_1 и B_2 несравнимы.*

Доказательство. Положим $n = \mathrm{nes}(f)$. Из теоремы 1, примененной к функции f и базису B_2, следует, что при $m \to \infty$

$$M_{B_2}(f^{(m)}) \to \infty, \tag{54}$$

Рассмотрим базис $B_1^* = B_1 \cup \{f\}$. По условию теоремы функция f бесповторно выражается в базисе B_1. Таким образом, все функции из базиса B_1^* бесповторно выражаются в базисе B_1 и обратно, а значит, по предложению 2, базисы B_1 и B_1^* эквивалентны.

Очевидно, что $L_{B_1^*}(f^{(m)}) = n^m$ для любого m, поэтому существует такая положительная константа C_1, что для любого m справедливо неравенство

$$L_{B_1}(f^{(m)}) \leqslant C_1 n^m.$$

Отсюда, в силу (54),

$$\frac{L_{B_2}(f^{(m)})}{L_{B_1}(f^{(m)})} = \frac{M_{B_2}(f^{(m)})}{L_{B_1}(f^{(m)})/n^m} \geqslant \frac{1}{C_1} M_{B_2}(f^{(m)})$$

и правая часть стремится к бесконечности при $m \to \infty$. Следовательно, неверно, что базис B_2 не хуже базиса B_1, т.е. либо базис B_1 лучше базиса B_2, либо базисы B_1 и B_2 несравнимы. Теорема 2 доказана.

Предложение 9. *Пусть $H = h(H_1, H_2, \dots, H_t)$ — отделимый ν-псевдоцентр, причем $H_2, \dots, H_t$ — его ν-центральные субформулы. Тогда*

$$H \equiv H_1 \oplus h(0, H_2, \dots, H_t)$$

и формула $h(0, H_2, \dots, H_t)$ является ν-центром.

Доказательство. Обозначим через $\tilde{x}$ набор всех ν-центральных переменных формулы H, т.е. набор всех переменных, входящих в субформулы $H_2, \dots, H_t$. Рассмотрим формулу

$$\Phi = h(y, H_2, \dots, H_t),$$

где y — некоторая переменная, не входящая в набор $\tilde{x}$. Если для некоторой подстановки констант $A = \{\tilde{x} = \tilde{c}\}$ формула $\Phi|_A$ реализует константу, то для этой же подстановки формула $H|_A$ реализует константу, т.е. в этом случае ν-псевдоцентр H является неотделимым, что не соответствует действительности.

Таким образом, для любой подстановки констант $A = \{\tilde{x} = \tilde{c}\}$ функция, реализуемая формулой $\Phi|_A$, существенно зависит от переменной y, т.е.

$$\Phi|_A \equiv y \oplus \Phi|_{A \cup \{y=0\}}.$$

Тогда, в силу произвольности A,

$$h(y, H_2, \dots, H_t) = \Phi \equiv y \oplus \Phi|_{\{y=0\}} = y \oplus h(0, H_2, \dots, H_t).$$

Отсюда, заменяя y субформулой H_1, получим требуемое тождество.

Докажем теперь, что формула $h(0, H_2, \dots, H_t)$ является ν-центром. Ни одна из субформул 0, $H_2, \dots, H_t$ формулы $\Psi = h(0, H_2, \dots, H_t)$ не содержит ν-подформул, поэтому формула Ψ может не быть ν-центром только в том случае, когда она не является ν-формулой. Если Ψ не является ν-формулой, то существует линейная функция Λ такая, что $\Psi \equiv \Lambda(0, H_2, \dots, H_t)$. Но тогда в силу уже доказанного утверждения

$$H \equiv H_1 \oplus \Psi \equiv H_1 \oplus \Lambda(0, H_2, \dots, H_t),$$

т.е. H не является ν-формулой. Полученное противоречие завершает доказательство.

Предложение доказано.

Определение 12. Базис B назовем линейным, если в нем бесповторно реализуется функция $x \oplus y$. В противном случае базис B назовем нелинейным.

Теорема 3. *Пусть B_1 — произвольный нормальный линейный базис, а B_2 — произвольный нормальный нелинейный базис. Тогда либо базис B_1 лучше, чем B_2, либо базисы B_1 и B_2 несравнимы.*

Прежде чем перейти к доказательству теоремы докажем одно вспомогательное утверждение. Положим $k = \mathrm{nes}(B_2)$. Тогда $k \geqslant 2$. Рассмотрим функцию

$$f_k(x_1, \dots, x_{2k}) = (x_1 \oplus \dots \oplus x_k)(x_{k+1} \oplus \dots \oplus x_{2k}).$$

Функция f_k нелинейна, ее мера устойчивости равна k и, в силу неравенства $k \geqslant 2$, не меньше двух. По предложению 1, конъюнкция бесповторно выражается в любом базисе, в том числе и в базисе B_1. Базис B_1 линейный, поэтому в нем бесповторно выражается функция $x \oplus y$. Тогда и функция f_k бесповторно выражается в базисе B_1.

Покажем, что функция f_k согласована с базисом B_2. Рассмотрим произвольное натуральное m, $m \geqslant 2$, и произвольную подфункцию g функции $f_k^{(m)}$.

Предложение 10. *Пусть H' — элементарная формула в базисе B_2, все переменные которой являются регулярными переменными функции g. Пусть также функция, реализуемая формулой H', нелинейна. Тогда существует переменная x_i, входящая в формулу H', и существует подстановка констант A, определенная на всех переменных, входящих в формулу H', кроме x_i, такая, что функция $g|_A$ существенно зависит от x_i, а формула $H'|_A$ реализует константу.*

Доказательство. Пусть $\phi(\tilde{x})$ — функция, реализуемая формулой H'. Функция ϕ нелинейна, поэтому существует переменная x_j из набора $\tilde{x}$ и существует подстановка констант A', определенная на всех переменных из набора $\tilde{x}$, кроме x_j, такая, что функция $\phi(\tilde{x})|_{A'}$ тождественно равна константе. Положим $x_i = x_j$, $A = A'$. Формула $H'|_A$ реализует тождественную константу. Осталось показать, что функция $g|_A$ существенно зависит от переменной x_i.

При подстановке констант вместо не более, чем $(k-1)$ переменных функции f_k, полученная функция будет существенно зависеть от всех оставшихся переменных. Кроме того, каждая регулярная переменная функции g входит в f_k-выделимый набор переменных функции g. Поэтому функция, полученная в результате подстановки констант вместо не более, чем $(k-1)$ регулярных переменных функции g, будет существенно зависеть от всех оставшихся переменных. Все переменные, входящие в область определения подстановки констант A, регулярны для функции g, и их количество не больше, чем $\mathrm{nes}(B_2)-1 = k-1$, так как формула H' элементарна и переменная x_i, входящая в формулу H', не входит в область определения A. Таким образом, функция $g|_A$ существенно зависит от переменной x_i.

Предложение 9 доказано.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим произвольную приведенную формулу H в базисе B_2, являющуюся либо ν_1-центром, либо отделимым ν_1-псевдоцентром, и такую, что все переменные формулы H являются переменными функции g, и все ν_1-центральные переменные формулы H регулярны для функции g. Тогда формула H является либо ν-центром, либо отделимым ν-псевдоцентром, и все ν-центральные переменные формулы H регулярны для функции g.

Возможны три случая:

(1) хотя бы одна из ν-центральных субформул формулы H имеет сложность, не меньшую двух;

(2) формула H является ν-центром, и сложность каждой ν-центральной субформулы формулы H не больше единицы;

(3) формула H является отделимым ν-псевдоцентром, и сложность каждой ν-центральной субформулы формулы H не больше единицы.

В каждом из этих случаев определим подстановку констант A и переменную x_i, требуемые в определении согласованности.

Рассмотрим первый случай. Пусть H_l — та ν-центральная субформула формулы H, которая имеет сложность, не меньшую двух. Тогда H_l — формула. По предложению 3, в формуле H_l существует элементарная подформула H'. Сначала рассмотрим случай, когда каждая переменная входит в формулу H' не более одного раза. В этом случае формула H' бесповторна и в силу нелинейности базиса B_2 не может реализовывать линейной функции, существенно зависящей от двух и более переменных. Поэтому, из условия $L(H') \geqslant 2$ следует, что либо функция, реализуемая формулой H', нелинейна, либо она не зависит от какой-то переменной, входящей в формулу H'. В первом из этих случаев требуемые x_i и A существуют по предложению 9, а во втором в качестве A возьмем пустую подстановку констант, а в качестве x_i — ту переменную, от которой формула H' не зависит.

Теперь рассмотрим случай, когда какая-то переменная входит в формулу H' два или более раз. В качестве x_i возьмем эту переменную, а в качестве A — такую

подстановку констант, определенную на всех переменных, входящих в формулу H', кроме x_i, что функция $g|_A$ существенно зависит от x_i. Формула $H'|_A$ реализует функцию одного аргумента, а следовательно, упрощается хотя бы на одно вхождение переменной x_i. Первый случай рассмотрен.

Рассмотрим второй случай. Формула H является ν-формулой, поэтому она не реализует никакой линейной функции от функций, реализуемых своими субформулами. Кроме того, все субформулы формулы H имеют сложность, не большую, чем 1, т.е. реализуют функции одного аргумента. Таким образом, функция, реализуемая формулой H, нелинейна. Также заметим, что формула H является элементарной формулой. Требуемые x_i и A существуют по предложению 9. Второй случай также рассмотрен.

Рассмотрим третий случай. Пусть $H = h(H_1, H_2, \dots, H_t)$, причем, для определенности, субформулы $H_2, \dots, H_t$ являются ν-центральными субформулами формулы H. Положим $\Psi = h(0, H_2, \dots, H_t)$. Из предложения 8 следует, что формула $H_1 \oplus \Psi$ реализует ту же функцию, что и формула H, и формула Ψ является ν-центром. Тогда формула Ψ не реализует никакой линейной функции от функций, реализуемых субформулами $H_2, \dots, H_t$. По условию случая 3, каждая из субформул $H_2, \dots, H_t$ имеет сложность, не большую единицы, следовательно, формула Ψ реализует нелинейную функцию.

Применив к формуле Ψ предложение 9, получим, что существует переменная x_i, входящая в одну из субформул $H_2, \dots, H_t$, и существует подстановка констант A, определенная на всех переменных, входящих в субформулы $H_2, \dots, H_t$, кроме x_i, такая, что функция $g|_A$ существенно зависит от x_i, а формула $\Psi|_A$ реализует константу. Последнее означает, что формула $H|_A$ реализует функцию, равную либо функции, реализуемой формулой $H_1|_A$, либо функции, реализуемой формулой $\neg(H_1|_A)$. Таким образом, формула $H_{|A}$ упрощаема по переменной x_i, и результат этого упрощения совпадает либо с формулой $H_1|_A$, либо с формулой $\neg(H_1|_A)$. Третий случай рассмотрен.

Таким образом, мы показали, что функция f_k согласована с базисом B_2. Применяя теорему 2, с учетом этого и ранее установленных фактов, получим, что либо базис B_1 лучше, чем базис B_2, либо базисы B_1 и B_2 несравнимы.

Теорема 3 доказана.

Определение 13. Пусть f — произвольная функция, $\tilde{a}, \tilde{b}$ — произвольные наборы констант из области определения функции f. Путем в единичном кубе функции f, соединяющим наборы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, назовем произвольную последовательность наборов

$$\tilde{a} = \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_t = \tilde{b}$$

такую, что для любого i, $1 \leqslant i < t$, наборы $\tilde{c}_i$ и $\tilde{c}_{i+1}$ отличаются ровно в одной компоненте (путь может иметь самопересечения). Скажем, что функция f постоянна вдоль пути $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_t$, если

$$f(\tilde{c}_1) = f(\tilde{c}_2) = \dots = f(\tilde{c}_t).$$

Определение 14. Функция f называется связной, если любые два набора $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, такие, что $f(\tilde{a}) = f(\tilde{b})$, можно соединить путем на единичном кубе функции f, вдоль которого функция f постоянна. Функция $f(x_1, \dots x_n)$ называется полносвязной, если для любых функций $f_1, \dots, f_n$, существенно зависящих от непустых, попарно не пересекающихся множеств переменных, функция $f(f_1, \dots, f_n)$ является связной.

Предложение 11. *Любая связная функция, мера устойчивости которой не меньше двух, является полносвязной.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную связную функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, мера устойчивости которой не меньше двух. Пусть $f_1(\tilde{x}_1), \dots, f_n(\tilde{x}_n)$ — произвольные функции, существенно зависящие от непустых, попарно не пересекающихся множеств переменных и пусть для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, набор $\tilde{x}_i$ содержит только существенные переменные функции f_i. Покажем, что функция

$$g(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = f(f_1(\tilde{x}_1), \dots, f_n(\tilde{x}_n))$$

связна.

Рассмотрим два произвольных набора констант

$$\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n), \qquad \tilde{b} = (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n),$$

для которых $g(\tilde{a}) = g(\tilde{b})$. Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, обозначим $a_i^* = f_i(\tilde{a}_i)$, $b_i^* = f_i(\tilde{b}_i)$. Положим

$$\tilde{a}^* = (a_1^*, \dots, a_n^*), \quad \tilde{b}^* = (b_1^*, \dots, b_n^*), \quad d = f(\tilde{a}^*).$$

По условию предложения 10, функция f связна, поэтому наборы $\tilde{a}^*$ и $\tilde{b}^*$ можно соединить путем в единичном кубе функции f, вдоль которого функция f постоянна. Тогда в силу связности f наборы $\tilde{a}^*$ и $\tilde{b}^*$ можно соединить таким путем

$$\tilde{a}^* = \tilde{c}_1^*, \dots, \tilde{c}_t^* = \tilde{b}^*,$$

который проходит (возможно, не один раз) через все наборы функции f, на которых она принимает значение d, и только через такие наборы.

По условию предложения, мера устойчивости функции f не меньше двух, поэтому для любой переменной x_i функции f, каждая из подфункций $f|_{\{x_i=1\}}$ и $f|_{\{x_i=0\}}$ тождественно не равна константе, а значит, принимает значение d. Поэтому существует j, $1 \leqslant j \leqslant t$, для которого наборы $\tilde{c}_j^*$ и $\tilde{c}_{j+1}^*$, различаются в i-й компоненте. Обозначим через j_i наибольшее из чисел, для которых наборы $\tilde{c}_{j_i}^*$ и $\tilde{c}_{j_i+1}^*$ различаются в i-й компоненте. Положим $J = \{j_1, \dots, j_n\}$.

Теперь будем строить путь в единичном кубе функции g, соединяющий наборы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, вдоль которого функция g постоянна. Вначале определим наборы констант $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_t$ такие, что для любого j, $1 \leqslant j \leqslant t$, имеет место равенство

$$(f_1(\tilde{c}_j^1), \dots, f_n(\tilde{c}_j^n)) = \tilde{c}_j^*,$$

где $\tilde{c}_j = (\tilde{c}_j^1, \dots, \tilde{c}_j^n)$. Наборы $\tilde{c}_i$ будем называть ключевыми. Положим $\tilde{c}_1 = \tilde{a}$. Пусть ключевой набор $\tilde{c}_j$, $1 \leqslant j < t$, уже построен. Построим набор $\tilde{c}_{j+1}$.

Обозначим через $k(j)$ номер той компоненты, в которой различаются наборы $\tilde{c}_j^*$ и $\tilde{c}_{j+1}^*$. Для всех i, $i \neq k(j)$, положим $\tilde{c}_{j+1}^i = \tilde{c}_j^i$, а набор $\tilde{c}_j^{k(j)}$ выберем в зависимости от того, принадлежит число j множеству J или нет. Если $j \in J$, то все наборы $\tilde{c}_{j+1}^*, \dots, \tilde{c}_t^*$ совпадают в $k(j)$-й компоненте и значение этой $k(j)$-й компоненты равно $f_{k(j)}(\tilde{b}_{k(j)})$. В этом случае положим $\tilde{c}_j^{k(j)} = \tilde{b}_{k(j)}$. Если же $j \notin J$, то в качестве $\tilde{c}_j^{k(j)}$ выберем произвольный набор констант, на котором функция $f_{k(j)}$ принимает значение, равное $k(j)$-й компоненте набора $\tilde{c}_{j+1}^*$ (такой набор всегда существует, так как функция $f_{k(j)}$ существенно зависит хотя бы от одной переменной).

Заметим, что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, все наборы $\tilde{c}^i_{j_i}, \dots, \tilde{c}^i_t$ равны набору $\tilde{b}_i$, поэтому $\tilde{c}_t = \tilde{b}$. Итак, мы построили последовательность ключевых наборов $\tilde{a} = \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_t = \tilde{b}$, такую, что $g(\tilde{c}_1) = \dots = g(\tilde{c}_t)$ и при любом j наборы $\tilde{c}_j$ и $\tilde{c}_{j+1}$ различаются только в одном поднаборе $\tilde{c}_j^{k(j)}$, причем $k(j)$ — номер той компоненты, в которой различаются наборы $\tilde{c}^*_j$ и $\tilde{c}^*_{j+1}$. Заметим также, что если $\tilde{c}$ — произвольный набор констант, совпадающий с набором $\tilde{c}_j$ везде, кроме $k(j)$-го поднабора, то $g(\tilde{c}) = g(\tilde{c}_j)$. Для любого j соединим ключевые наборы $\tilde{c}_j$ и $\tilde{c}_{j+1}$ произвольным путем

$$\tilde{c}_j = \tilde{e}^0_j, \dots, \tilde{e}^{l_j}_j = \tilde{c}_{j+1},$$

все наборы в котором различаются только в $k(j)$-м поднаборе. Тогда функция g постоянна вдоль пути

$$\tilde{a} = \tilde{e}^0_1, \dots, \tilde{e}^{l_1}_1, \tilde{e}^1_2, \dots, \tilde{e}^{l_2}_2, \dots, \tilde{e}^1_t, \dots, \tilde{e}^{l_t}_t = \tilde{b}.$$

Таким образом, функция g связна.

Предложение 10 доказано.

Положим

$$\psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 \dots \overline{x}_n, \qquad n \geqslant 2.$$

Предложение 12. *Любая несвязная функция имеет подфункцию, обобщенно однотипную с одной из функций ψ_n.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную несвязную функцию f. Расстоянием между двумя наборами констант одинаковой размерности назовем число разрядов, в которых эти наборы различаются. Расстояние между наборами $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$ обозначим $\rho(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$.

Образуем множество M всех пар наборов констант $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$, таких, что $f(\tilde{a}_1) = f(\tilde{a}_2)$, и в единичном кубе функции f не существует пути, соединяющего наборы $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$, вдоль которого функция f постоянна. В силу несвязности функции f множество M непусто. Положим

$$\rho = \min\{\rho(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) \mid (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) \in M\}. \tag{55}$$

Тогда $\rho \geqslant 2$. Пусть $(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2)$ — та пара наборов, на которой достигается минимум, т.е. $\rho(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) = \rho$.

Обозначим через $i_1, \dots, i_k$, все различные разряды, в которых наборы $\tilde{b}_1$ и $\tilde{b}_2$ совпадают. Рассмотрим произвольный набор констант $\tilde{b}_3$, совпадающий с набором $\tilde{b}_1$ в разрядах $i_1, \dots, i_k$ и отличный от $\tilde{b}_1$ и от $\tilde{b}_2$. Ясно, что

$$\rho(\tilde{b}_1, \tilde{b}_3) < \rho, \qquad \rho(\tilde{b}_2, \tilde{b}_3) < \rho. \tag{56}$$

Докажем, что $f(\tilde{b}_3) \neq f(\tilde{b}_1)$.

Наборы $\tilde{b}_1$ и $\tilde{b}_2$ нельзя соединить путем, вдоль которого функция f постоянна. Поэтому, если $f(\tilde{b}_3) = f(\tilde{b}_1)$, то либо наборы $\tilde{b}_1$ и $\tilde{b}_3$, либо наборы $\tilde{b}_2$ и $\tilde{b}_3$ нельзя соединить путем, вдоль которого функция f постоянна, а значит, либо $(\tilde{b}_1, \tilde{b}_3) \in M$, либо $(\tilde{b}_2, \tilde{b}_3) \in M$. В этом случае (56) противоречит (55). Итак, $f(\tilde{b}_1) = f(\tilde{b}_2) \neq f(\tilde{b}_3)$.

Пусть $\tilde{b}_1 = (b_1^1, \dots, b_1^s)$. Рассмотрим подстановку констант

$$B = \{x_{i_1} = b_1^{i_1}, \dots, x_{i_k} = b_1^{i_k}\}.$$

Функция $f|_B$ на некоторых двух противоположных наборах принимает значение $f(\tilde{b}_1)$, а на всех остальных наборах значение $\neg(f(\tilde{b}_1))$. Следовательно, функция $f|_B$ обобщенно однотипна с функцией ψ_{s-k}.

Предложение 11 доказано.

Лемма 8. *Пусть B — нормальный базис, f — неразделимая функция, бесповторно не реализуемая в базисе B, $n = \mathrm{nes}(f)$, u — мера устойчивости функции f, $u \geqslant 2$, m — натуральное число, g — произвольная подфункция функции $f^{(m)}$, $H = h(H_1, \dots, H_k)$ — бесповторная приведенная ν-формула в базисе B, h — полносвязная функция, пусть также все переменные формулы H являются регулярными переменными функции g. Тогда существует подстановка констант A, определенная только на переменных, входящих в формулу H, и существует переменная x_i такая, что функция $g|_A$ существенно зависит от переменной x_i, а формула $H|_A$ в базисе B упрощаема по переменной x_i.*

Доказательство. Обозначим через $\tilde{x}$ набор, состоящий из всех переменных, входящих в формулу H (каждая переменная входит в набор $\tilde{x}$ не более одного раза). Возможны два случая:

(1) не существует двух переменных из набора $\tilde{x}$, входящих в один и тот же 1-набор переменных функции g;

(2) существуют две переменные из набора $\tilde{x}$, входящие в один и тот же 1-набор переменных функции g.

Рассмотрим первый случай. В силу бесповторности и приведенности формулы H, функции, реализуемые субформулами $H_1, \dots, H_k$, существенно зависят от непустых, попарно не пересекающихся множеств переменных. Кроме того, функция h нелинейна (так как H — ν-формула), поэтому формула H реализует нелинейную функцию. Тогда существует переменная x_i, входящая в формулу H, и существует подстановка констант A, определенная на всех переменных формулы H, кроме x_i, такая, что формула $H|_A$ реализует тождественную константу. Очевидно, что формула $H|_A$ в базисе B упрощаема по переменной x_i. В силу приведенности формулы H, функция g существенно зависит от переменной x_i.

Рассмотрим все те 1-наборы переменных функции g, которые содержат переменные из набора $\tilde{x}$, отличные от x_i. По условию первого случая, каждый из этих наборов содержит ровно по одной переменной из набора $\tilde{x}$. Далее, по условию леммы, все переменные из набора $\tilde{x}$ регулярны, т.е. каждый из рассматриваемых 1-наборов является f-выделимым. Наконец, по условию леммы, мера устойчивости функции f не меньше двух, поэтому функция $g|_A$ существенно зависит хотя бы от одной переменной из каждого рассматриваемого 1-набора. Отсюда следует, что функция $g|_A$ существенно зависит от всех существенных переменных функции g, не входящих в рассматриваемые 1-наборы, в частности, функция g существенно зависит от переменной x_i. Итак, требуемая подстановка констант A построена.

Рассмотрим второй случай. Для каждого l, $1 \leqslant l \leqslant k$, обозначим через h_l функцию, реализуемую субформулой H_l, а через $\phi(\tilde{x})$ функцию, реализуемую формулой

H. Предположим, что утверждение леммы не выполнено. Пусть $\tilde{y}$ — набор, состоящий из всех существенных переменных функции g, не входящих в набор $\tilde{x}$. Таким образом, функцию g можно рассматривать как функцию $g(\tilde{x}, \tilde{y})$, зависящую от двух наборов переменных. Покажем, что набор переменных $\tilde{x}$ является ϕ-выделимым для функции g.

По условию леммы, формула H приведенная, следовательно, функция ϕ тождественно не равна константе, поэтому существуют два набора констант $\tilde{c}_0$ и $\tilde{c}_1$ такие, что $\phi(\tilde{c}_0) = 0$, $\phi(\tilde{c}_1) = 1$. Определим функцию $\psi(z, \tilde{y})$, для любого набора $\tilde{y}$ положив

$$\psi(0, \tilde{y}) = g(\tilde{c}_0, \tilde{y}), \qquad \psi(1, \tilde{y}) = g(\tilde{c}_1, \tilde{y}).$$

Рассмотрим произвольный набор констант $\tilde{a}$, соответствующий набору переменных $\tilde{x}$. Пусть $\phi(\tilde{a}) = \sigma$. По условию леммы, функция h является полносвязной. Кроме того, каждая из функций h_j тождественно не равна константе (это следует из приведенности формулы H), и множества переменных функций h_j попарно не пересекаются (это следует из бесповторности H). По определению полносвязности, функция $\phi = h(h_1, \dots, h_k)$ является связной. Отсюда следует, что существует последовательность наборов констант $\tilde{a} = \tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_t = \tilde{c}_\sigma$ такая, что для любого j, $0 \leqslant j \leqslant t$, имеет место равенство $\phi(\tilde{a}_j) = \sigma$ и для любого j, $1 \leqslant j \leqslant t$, наборы $\tilde{a}_{j-1}$ и $\tilde{a}_j$ отличаются ровно в одной компоненте.

Рассмотрим произвольное j, $1 \leqslant j \leqslant t$. Обозначим через r_j номер той компоненты, в которой различаются наборы $\tilde{a}_{j-1}$ и $\tilde{a}_j$. Пусть A_j — подстановка констант, сопоставляющая всем переменным из набора $\tilde{x}$, кроме стоящей на r_j-м месте, соответствующие константы из набора $\tilde{a}_j$. В силу выбора подстановки констант A_j, справедливо тождество $\phi|_{A_j} \equiv \sigma$, а значит, формула $H|_{A_j}$ упрощаема по переменной, стоящей на r_j-м месте в наборе $\tilde{x}$. Мы предположили, что условие леммы не выполнено, т.е. для любой подстановки констант A, определенной только на переменных из набора $\tilde{x}$, и для любой переменной x_i, если формула $H|_A$ упрощаема по переменной x_i, то функция $g|_A$ не зависит от x_i. Следовательно, функция $g|_{A_j}$ не зависит от переменной, стоящей на r_j-м месте в наборе $\tilde{x}$. Поэтому $g(\tilde{a}_{j-1}, \tilde{y}) \equiv g(\tilde{a}_j, \tilde{y})$ и

$$g(\tilde{a}, \tilde{y}) \equiv g(\tilde{a}_0, \tilde{y}) \equiv \dots \equiv g(\tilde{a}_t, \tilde{y}) \equiv g(\tilde{c}_\sigma, \tilde{y}) \equiv \psi(\sigma, \tilde{y}) \equiv \psi(\phi(\tilde{a}), \tilde{y}).$$

Итак, мы установили, что существует такая функция ψ, для которой имеет место тождество

$$g(\tilde{x}, \tilde{y}) \equiv \psi(\phi(\tilde{x}), \tilde{y}).$$

Это по определению означает, что набор переменных $\tilde{x}$ является ϕ-выделимым для функции g.

По условию случая 2, в наборе $\tilde{x}$ существуют две переменные, входящие в один и тот же 1-набор переменных функции g. Обозначим через $\tilde{z}$ какой-нибудь 1-набор переменных функции g, содержащий не менее двух переменных из набора $\tilde{x}$. По условию леммы, все переменные из набора $\tilde{x}$ регулярны, т.е. набор $\tilde{z}$ является f-выделимым для функции g. Обозначим через $\tilde{w}$ набор, состоящий из всех переменных, входящих и в набор $\tilde{x}$ и в набор $\tilde{z}$, Пересечение выделимых множеств переменных для одной и той же функции является выделимым множеством для этой же функции (см. [1], следствие из леммы 2.5), поэтому набор $\tilde{w}$ выделим для функции g. Все переменные из набора $\tilde{w}$ входят в набор $\tilde{z}$, который f-выделим для функции g. Следовательно (см. [1], лемма 2.5), набор $\tilde{w}$ выделим для функции $f(\tilde{z})$. По условию леммы, f неразделимая функция; кроме того, набор $\tilde{w}$ содержит не меньше двух

переменных, а значит, наборы $\tilde{w}$ и $\tilde{z}$ состоят из одних и тех же переменных, т.е. все переменные из 1-набора $\tilde{z}$ входят в набор $\tilde{x}$.

Рассмотрим подстановку констант B, определенную на всех переменных из набора $\tilde{y}$ и такую, что функция $g(\tilde{x},\tilde{y})|_B \equiv \psi(\phi(\tilde{x}),\tilde{y})|_B$ существенно зависит от всех переменных из набора $\tilde{x}$. Тогда для некоторой константы γ

$$\phi(\tilde{x}) \equiv g(\tilde{x},\tilde{y})|_B \oplus \gamma.$$

С другой стороны, существует функция ψ_1 такая, что

$$g(\tilde{x},\tilde{y}) \equiv \psi_1(f(\tilde{z}),\tilde{z}_0)$$

(где $\tilde{z}_0$ — набор всех переменных функции g, не входящих в набор $\tilde{z}$), а значит,

$$\phi(\tilde{x}) \equiv \psi_1(f(\tilde{z}),\tilde{z}_0)|_B \oplus \gamma.$$

Пусть $\tilde{z}_1$ — набор всех переменных из набора $\tilde{x}$, не входящих в набор $\tilde{z}$. Нам известно, что все переменные из набора $\tilde{z}$ входят в набор $\tilde{x}$, поэтому существует такая функция ψ_2, что

$$\phi(\tilde{x}) \equiv \psi_2(f(\tilde{z}),\tilde{z}_1).$$

Итак, набор переменных $\tilde{z}$ является f-выделимым набором переменных функции $\phi(\tilde{x})$. Отсюда следует, что с помощью операций подстановки констант вместо переменных и навешивания отрицаний на переменные из функции ϕ можно получить функцию f. Вспомним, что формула H реализует функцию ϕ в базисе B. Таким образом, из формулы H с помощью операций подстановки констант вместо переменных и навешивания отрицаний на переменные можно получить формулу H', реализующую функцию f. По условию леммы, базис B нормальный, а формула H бесповторная, поэтому H' — бесповторная формула в базисе B, реализующая функцию f. Но по условию леммы, функция f бесповторно не реализуется в базисе B. Полученное противоречие заканчивает разбор случая 2.

Лемма 7 доказана.

Определение 15. Пусть $f(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ — произвольная функция, зависяшая от трех наборов переменных $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и $\tilde{z}$, никакие два из которых не имеют общих переменных. Пусть также наборы $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ выделимы для функции $f(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$. Скажем, что набор переменных $\tilde{x}$ забивает набор переменных $\tilde{y}$, если существует подстановка констант B, определенная на наборе $\tilde{x}$, такая, что функция $f(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})|_B$ существенно не зависит ни от какой переменной из $\tilde{y}$ (ср. с определением забивания в [3]).

Определение 16. Функцию $f(x_1,\dots,x_n)$ назовем линейно забиваемой, если для любой переменной x_i существует линейная функция

$$\Lambda(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$$

такая, что для любого набора констант

$$\tilde{c} = (c_1,\dots,c_{i-1},c_{i+1},\dots,c_n)$$

из условия $\Lambda(\tilde{c}) = 1$ следует, что функция

$$f(c_1,\dots,c_{i-1},x_i,c_{i+1},\dots,c_n)$$

не зависит от переменной x_i.

Лемма 9. *Пусть B — нормальный линейный базис, f — неразделимая функция, бесповторно не реализуемая в базисе B, $n = \mathrm{nes}(f)$, $n \geqslant 3$, u — мера устойчивости функции f, $u \geqslant 2$, m — натуральное число, $m \geqslant 2$, g — подфункция функции $f^{(m)}$, H — приведенная формула, все переменные которой являются регулярными переменными функции g, H является бесповторным ν_1-центром, $H = h(H_1, \dots, H_t)$, $h \in B$ и функция h линейно забиваема.*

Тогда существует подстановка констант A, определенная только на переменных формулы H и существует переменная x_i такая, что функция $g|_A$ существенно зависит от переменной x_i, а формула $H|_A$ в базисе B упрощаема по x_i.

Доказательство. Формула H является ν_1-формулой, поэтому среди переменных, входящих в H, найдутся две, принадлежащие различным 1-наборам переменных функции g. Тогда среди переменных формулы H найдутся такие две переменные x_{j_1} и x_{j_2}, что они принадлежат различным 1-наборам переменных функции g и они же входят в разные субформулы H_i формулы H. Обозначим через $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ те два 1-набора переменных функции g, в которые входят переменные x_{j_1} и x_{j_2} соответственно.

По условию леммы все переменные, входящие в формулу H, и, в частности, x_{j_1} и x_{j_2}, регулярны для функции g, поэтому наборы $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ являются f-выделимыми для функции g. Покажем, что либо набор $\tilde{x}_1$ не забивает набор $\tilde{x}_2$, либо набор $\tilde{x}_2$ не забивает набор $\tilde{x}_1$. Рассмотрим два случая:

(1) переменные x_{j_1} и x_{j_2} входят в один и тот же 2-набор переменных функции g;

(2) переменные x_{j_1} и x_{j_2} входят в различные 2-наборы переменных функции g.

Рассмотрим первый случай. Пусть $\tilde{y}$ — тот 2-набор переменных функции g, в который входят переменные x_{j_1} и x_{j_2}. Пусть также $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$ — все 1-наборы переменных, состоящие только из переменных набора $\tilde{y}$. Среди наборов $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$ присутствуют наборы $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$. Пусть, для определенности, $\tilde{y}_1 = \tilde{x}_1$ и $\tilde{y}_2 = \tilde{x}_2$. Обозначим через $\tilde{y}'$ набор, состоящий из всех тех переменных функции g, которые не входят в набор $\tilde{y}$. Тогда существуют функции $\psi, \phi_3, \dots, \phi_n$ такие, что

$$g(\tilde{y}, \tilde{y}') \equiv \psi(f(f(\tilde{x}_1), f(\tilde{x}_2), \phi_3(\tilde{y}_3), \dots, \phi_n(\tilde{y}_n)), \tilde{y}').$$

Заметим, что в силу регулярности переменных x_{j_1} и x_{j_2}, ни одна из функций $\phi_3(\tilde{y}_3), \dots, \phi_n(\tilde{y}_n)$ тождественно не равна константе. Кроме того, наборы $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$ попарно не пересекаются. Поэтому, если набор $\tilde{x}_1$ забивает набор $\tilde{x}_2$ и набор $\tilde{x}_2$ забивает набор $\tilde{x}_1$, то переменная y_1 функции $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ забивает переменную y_2 (см. [3]) и переменная y_2 забивает переменную y_1. Тогда при подстановке всевозможных пар констант на места переменных y_1 и y_2 в функцию $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ может получиться не более двух различных подфункций. Отсюда следует (см. лемму 1.1 в [1]), что множество переменных y_1, y_2 выделимо для функции $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$, а это противоречит условиям леммы (f — неразделимая функция и $n \geqslant 3$). Таким образом, либо набор $\tilde{x}_1$ не забивает набор $\tilde{x}_2$, либо набор $\tilde{x}_2$ не забивает набор $\tilde{x}_1$.

Рассмотрим случай 2. Пусть $\tilde{y}^1$ и $\tilde{y}^2$ — те 2-наборы переменных функции g, которым принадлежат переменные x_{j_1} и x_{j_2} соответственно. Далее, пусть $\tilde{y}_1^1, \dots, \tilde{y}_n^1$ — все 1-наборы, состоящие только из переменных набора $\tilde{y}^1$, а $\tilde{y}_1^2, \dots, \tilde{y}_n^2$ — все 1-наборы, состоящие только из переменных набора $\tilde{y}^2$. Пусть, для определенности, $\tilde{y}_1^1 = \tilde{x}_1$ и

$\tilde{y}_1^2 = \tilde{x}_2$. Обозначим через $\tilde{y}''$ набор, состоящий из всех переменных функции g, не входящих в наборы $\tilde{y}^1$ и $\tilde{y}^2$. Тогда существуют функции

$$\psi', \phi_1^1, \dots, \phi_n^1, \phi_1^2, \dots, \phi_n^2$$

такие, что

$$g(\tilde{y}^1, \tilde{y}^2, \tilde{y}'') \equiv \psi'(f(f(\tilde{x}_1), \phi_1^1(\tilde{y}_1^1), \dots, \phi_n^1(\tilde{y}_n^1)), f(f(\tilde{x}_2), \phi_1^2(\tilde{y}_1^2), \dots, \phi_n^2(\tilde{y}_n^2)), \tilde{y}'').$$

Покажем, что набор $\tilde{x}_1$ не забивает набор $\tilde{x}_2$. В силу регулярности переменной x_{j_1} ни одна из функций $\phi_2^1(\tilde{y}_2^1), \dots, \phi_n^1(\tilde{y}_n^1)$ тождественно не равна константе. Далее, по условию леммы мера устойчивости функции f не меньше двух, поэтому для любой подстановки констант B функция

$$f(f(\tilde{x}_1)|_B, \phi_2^1(\tilde{y}_2^1), \dots, \phi_n^1(\tilde{y}_n^1))$$

тождественно не равна константе, а значит, функция $g|_B$ существенно зависит от всех переменных из $\tilde{x}_2$. Таким образом, набор $\tilde{x}_1$ не забивает набор $\tilde{x}_2$. Случай 2 рассмотрен.

Итак, мы установили, что хотя бы один из наборов $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ не забивает другой. Пусть, для определенности, набор $\tilde{x}_2$ не забивает набор $\tilde{x}_1$. Мы выбрали переменные x_{j_1} и x_{j_2} так, чтобы они входили в разные субформулы H_i формулы H. Пусть, для определенности, переменная x_{j_1} входит в субформулу H_1, а переменная x_{j_2} входит в субформулу H_2.

Рассмотрим произвольное i, $2 \leqslant i \leqslant t$. По условию леммы, формула H является ν_1-центром, поэтому субформула H_i не содержит подформул, являющихся ν_1-формулами. Пусть $H_i^1, \dots, H_i^{k_i}$ — все различные ν-подформулы субформулы H_i максимальные по включению в множестве всех ν-подформул субформулы H_i, а $\tilde{z}_i$ — набор всех переменных, хотя бы одно вхождение которых в субформулу H_i лежит вне всех формул $H_i^1, \dots, H_i^{k_i}$. Тогда существуют линейные функции Λ_i^1 и Λ_i^2 такие, что

$$H_i \equiv \Lambda_i^1(H_i^1, \dots, H_i^{k_i}) \oplus \Lambda_i^2(\tilde{z}_i). \tag{57}$$

Для любого j, $1 \leqslant j \leqslant k_i$, формула H_i^j является ν-формулой, но не является ν_1-формулой, поэтому все переменные формулы H_i^j принадлежат одному и тому же 1-набору переменных функции g. Разобьем множество $M_i = \{H_i^1, \dots, H_i^{k_i}\}$ на две части,

$$M_i^1 = \{H_i^{l(1,1)}, \dots, H_i^{l(1,s_1)}\},$$
$$M_i^2 = \{H_i^{l(2,1)}, \dots, H_i^{l(2,s_2)}\},$$

включив в множество M_i^1 те и только те формулы H_i^j, все переменные которых принадлежат 1-набору $\tilde{x}_2$. Тогда ни одна из формул H_i^j, принадлежащих множеству M_i^2, не содержит переменных из набора $\tilde{x}_2$.

Набор переменных $\tilde{z}_i$ также разобъем на две части, $\tilde{z}_i^1$ и $\tilde{z}_i^2$, включив в набор $\tilde{z}_i^1$ те и только те переменные, которые принадлежат набору $\tilde{x}_2$. В силу (57), существуют линейные функции $\Lambda_i^3, \Lambda_i^4, \Lambda_i^5$ и Λ_i^6 такие, что

$$H_i \equiv \Lambda_i^3(H_i^{l(1,1)}, \dots, H_i^{l(1,s_1)}) \oplus \Lambda_i^4(\tilde{z}_i^1) \oplus \Lambda_i^5(H_i^{l(2,1)}, \dots, H_i^{l(2,s_2)}) \oplus \Lambda_i^6(\tilde{z}_i^2). \tag{58}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}\Phi_i^1 &= \Lambda_i^3(H_i^{l(1,1)},\dots,H_i^{l(1,s_1)}) \oplus \Lambda_i^4(\tilde{z}_i^1),\\ \Phi_i^2 &= \Lambda_i^5(H_i^{l(2,1)},\dots,H_i^{l(2,s_2)}) \oplus \Lambda_i^6(\tilde{z}_i^2).\end{aligned} \tag{59}$$

Все переменные формулы Φ_i^1 принадлежат набору $\tilde{x}_2$, а ни одна переменная формулы Φ_i^2 не принадлежит набору $\tilde{x}_2$.

Рассмотрим функцию $h(y_1, y_2, \dots, y_t)$. По условию леммы, функция h линейно забиваема, поэтому существует линейная функция $\Lambda(y_2, \dots, y_t)$ такая, что для любой подстановки констант $B' = \{y_2 = c_2, \dots, y_t = c_t\}$ из условия $\Lambda(c_2, \dots, c_t) = 1$ следует, что $\mathrm{nes}(h(y_1, y_2, \dots, y_t)|_{B'}) = 0$. В силу (58) и (59), существуют линейные функции Λ^1 и Λ^2, для которых

$$\Lambda(H_2, \dots, H_t) \equiv \Lambda^1(\Phi_2^1, \dots, \Phi_t^1) \oplus \Lambda^2(\Phi_2^2, \dots, \Phi_t^2). \tag{60}$$

Введем обозначения

$$\Phi^1 = \Lambda^1(\Phi_2^1, \dots, \Phi_t^1), \qquad \Phi^2 = \Lambda^2(\Phi_2^2, \dots, \Phi_t^2). \tag{61}$$

По условию леммы, формула H бесповторна. Отсюда, в силу (58), (59), (60) и (61), следует, что формулы Φ^1 и Φ^2 также бесповторны и содержат только те переменные, которые входят в субформулы $H_2, \dots, H_t$. По условию леммы, B — линейный и нормальный базис, поэтому формулы Φ^1 и Φ^2 — это формулы в базисе B. Далее, все переменные формулы Φ^1 входят в набор $\tilde{x}_2$, а ни одна переменная формулы Φ^2 не входит в набор $\tilde{x}_2$. Наконец, из определения Λ, (60) и (61) следует, что для любой подстановки констант A', определенной на всех переменных формул Φ^1 и Φ^2, если формула $(\Phi^1 \oplus \Phi^2)|_{A'}$ реализует константу 1, то формула $h(H_1, \dots, H_t)|_{A'}$ реализует функцию, не зависящую ни от какой переменной формулы H_1, в частности, от x_{j_1}.

Найдем такую подстановку констант A', что формула $(\Phi^1 \oplus \Phi^2)|_{A'}$ реализует константу 1, а функция $g|_{A'}$ существенно зависит от переменной x_{j_1}. Обозначим через $\phi^1(\tilde{x}_2)$ функцию, реализуемую формулой Φ^1. Мы знаем, что Φ^1 — бесповторная формула в базисе B. По условию леммы функция f бесповторно не реализуется в базисе B, а значит, и функция $\neg f$ бесповторно не реализуется в базисе B. Отсюда следует, что

$$f(\tilde{x}_2) \neq \phi^1(\tilde{x}_2), \qquad f(\tilde{x}_2) \neq \neg\phi^1(\tilde{x}_2). \tag{62}$$

Пару констант (a, b) назовем реализуемой, если существует такой набор констант $\tilde{d}$, что $f(\tilde{d}) = a$ и $\phi^1(\tilde{d}) = b$. Покажем, что мощность множества реализуемых пар не меньше трех. Действительно, если реализуются только пары (a_0, b_0) и $(a_0, \neg b_0)$ (где a_0, b_0 — некоторые константы), то функция f тождественно равна константе a_0, что невозможно; если реализуются только пары (a_0, b_0) и $(\neg a_0, b_0)$, то функция ϕ^1 тождественно равна константе b_0, что тоже невозможно, так как функция $\phi^1(\tilde{x}_2)$ существенно зависит от переменной x_{j_2}; наконец, если реализуются только пары (a_0, b_0) и $(\neg a_0, \neg b_0)$, то либо $f = \phi^1$, либо $f = \neg\phi^1$, а это противоречит (62).

Итак, мощность множества реализуемых пар не меньше трех, а значит, существует такая константа a_1, что пары $(a_1, 0)$ и $(a_1, 1)$ реализуемы. Тогда существуют такие подстановки констант $A_0 = \{\tilde{x}_2 = \tilde{d}_0\}$ и $A_1 = \{\tilde{x}_2 = \tilde{d}_1\}$, для которых

$$f(\tilde{x}_2)|_{A_0} = f(\tilde{x}_2)|_{A_1} = a_1, \quad \phi^1(\tilde{x}_2)|_{A_0} = 0, \quad \phi^1(\tilde{x}_2)|_{A_1} = 1. \tag{63}$$

Ранее мы установили, что набор переменных $\tilde{x}_2$ не забивает набор переменных $\tilde{x}_1$. Поэтому переменная x_{j_1} существенна для функции $g|_{A_0}$. Мы знаем, что ни одна переменная формулы Φ^2 не входит в набор $\tilde{x}_2$ и, кроме того, в силу бесповторности формулы H, переменная x_{j_1} не входит в формулу Φ^2, а значит, существует подстановка констант A_2, определенная на всех переменных формулы Φ^2, такая, что функция $g|_{(A_0 \cup A_2)}$ существенно зависит от переменной x_{j_1}. Из (63) следует, что $g|_{A_0} \equiv g|_{A_1}$, поэтому $g|_{(A_0 \cup A_2)} \equiv g|_{(A_1 \cup A_2)}$, т.е. функция $g|_{(A_1 \cup A_2)}$ также существенно зависит от переменной x_{j_1}.

Наконец, в силу (63) существует такое $p \in \{0, 1\}$, что

$$\Phi^1|_{A_p} \oplus \Phi^2|_{A_2} \equiv 1. \tag{64}$$

Положим $A = A' = A_p \cup A_2$. В качестве x_i выберем переменную x_{j_1}. Функция $g|_A$ существенно зависит от переменной x_i. В силу (64) $(\Phi^1 \oplus \Phi^2)|_A \equiv 1$. Отсюда, как мы знаем, следует, что формула $H|_A = h(H_1, \dots, H_t)|_A$ реализует функцию, не зависящую ни от какой переменной формулы H_1, в частности, от x_i. Поэтому формула $H|_A$ упрощаема по переменной x_i.

Лемма 8 доказана.

Определение 17. Базис B назовем СЛЗ-базисом, если любая неразделимая нелинейная функция, бесповторно реализуемая в базисе B, либо связна, либо линейно забиваема.

Примерами СЛЗ-базисов являются базисы $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$ и $B_0 \cup \{\oplus\}$.

Лемма 10. *Пусть B — нормальный линейный СЛЗ-базис и f — неразделимая нелинейная функция, бесповторно не реализуемая в базисе B. Тогда функция f и базис B согласованы.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное натуральное m, $m \geqslant 2$, произвольную подфункцию g функции $f^{(m)}$ и произвольную приведенную ν_1-формулу H в базисе B такую, что H является либо ν_1-центром, либо отделимым ν_1-псевдоцентром, все переменные формулы H являются переменными функции g, и все ν_1-центральные переменные формулы H регулярны для g. Для доказательства леммы достаточно предъявить подстановку констант A, определенную только на ν_1-центральных переменных формулы H, и переменную x_i такую, что функция $g|_A$ существенно зависит от x_i, а формула $H|_A$ упрощаема по x_i в базисе B.

Пусть $H = h(H_1, H_2, \dots, H_t)$ причем, для определенности, субформулы $H_2, \dots, H_t$ являются ν_1-центральными субформулами формулы H (субформула H_1 может как быть ν_1-центральной, так и не быть таковой). Рассмотрим 4 случая:

(1) формула H является бесповторным ν_1-центром;

(2) формула H является ν_1-центром, но не является бесповторной формулой;

(3) формула H является отделимым ν_1-псевдоцентром и множества переменных субформул $H_2, \dots, H_t$ попарно не пересекаются;

(4) формула H является отделимым ν_1-псевдоцентром и множества переменных каких-то двух субформул среди $H_2, \dots, H_t$ имеют непустое пересечение.

В случаях 1, 2 и 4 предъявим требуемые A и x_i и докажем, что случай 3 не реализуется.

Рассмотрим случай 1. Покажем, что $\mathrm{nes}(f) \geqslant 3$. По условию леммы, функция f бесповторно не реализуется в базисе B. В то же время, по предложению 1, константы, функции одного аргумента и нелинейные функции двух аргументов бесповторно реализуются в любом базисе, поэтому либо f — линейная функция двух аргументов, либо $\mathrm{nes}(f) \geqslant 3$. По условию леммы 9, функция f нелинейна, а значит, $\mathrm{nes}(f) \geqslant 3$. Заметим, что функция f неразделима, поэтому, в силу предложения 7, мера устойчивости функции f не меньше двух.

В силу приведенности формулы H, функция h неразделима. Формула H является ν-формулой, а значит, функция h нелинейна. Кроме того, $h \in B$. Тогда, по определению СЛЗ-базиса, функция h либо связна, либо линейно забиваема. Если h линейно забиваема, то требуемые A и x_i существуют по лемме 8.

Пусть теперь функция h связна, но не является линейно забиваемой. Очевидно, что любая нелинейная функция двух аргументов является линейно забиваемой, поэтому $\mathrm{nes}(h) \geqslant 3$. Кроме того, функция h неразделима. Тогда, по предложению 7, мера устойчивости функции h не меньше двух. Наконец, функция h связна, а значит, по предложению 10, она является полносвязной. Требуемые A и x_i существуют по лемме 7. Случай 1 рассмотрен.

Рассмотрим случай 2. Обозначим через x_i ту переменную, которая входит в формулу H не меньше двух раз, а через A ту подстановку констант вместо всех оставшихся переменных формулы H, при которой функция $g|_A$ существенно зависит от переменной x_i. Тогда, очевидно, формула $H|_A$ упрощаема по переменной x_i и, в силу нормальности базиса B, формула, полученная после этого упрощения, будет формулой в базисе B.

Рассмотрим случай 3. Множества переменных субформул $H_2, \dots, H_t$ попарно не пересекаются и в силу приведенности формулы H ни одна из субформул $H_2, \dots, H_t$ не реализует функцию, тождественно равную константе. Поэтому, если существуют такие константы $c_2, \dots, c_t$, что функция $g(y_1, c_2, \dots, c_t)$ не зависит от переменной y_1, то существует подстановка констант B, определенная только на переменных субформул $H_2, \dots, H_t$, для которой формула $H|_B$ реализует константу, а это противоречит отделимости ν_1-формулы H.

Итак, не существует таких констант $c_2, \dots, c_t$, что $\mathrm{nes}(g(y_1, c_2, \dots, c_t)) = 0$. Отсюда следует тождество

$$h(y_1, y_2, \dots, y_t) \equiv y_1 \oplus h(0, y_2, \dots, y_t). \tag{65}$$

Далее, функция $h(0, y_2, \dots, y_t)$ нелинейна (в противном случае функция h линейна, и формула H не может быть ν-формулой). Тогда $t \geqslant 3$, следовательно, тождество (65) противоречит неразделимости функции h. Случай 3 не реализуется.

Рассмотрим случай 4. Обозначим $\Psi = h(0, H_2, \dots, H_t)$. В силу предложения 8, $H \equiv H_1 \oplus \Psi$. Обозначим через x_i ту переменную, которая входит не менее, чем в две субформулы из $H_2, \dots, H_t$, а через A ту подстановку констант вместо всех переменных субформул $H_2, \dots, H_t$, при которой функция $g|_A$ существенно зависит от переменной x_i. Тогда формула $\Psi|_A$ упрощаема по переменной x_i. Результат этого упрощения обозначим через Ψ^*. Очевидно, что формула $H' = H_1|_A \oplus \Psi^*$ будет результатом упрощения формулы $H|_A$ по переменной x_i. По условию леммы, базис B линейный и нормальный, поэтому H' — формула в базисе B. Итак, формула

$H|_A$ в базисе B упрощаема по переменной x_i. Случай 4 также рассмотрен. Лемма 9 доказана.

Предложение 13. *Для любой неразделимой функции f и любого нормального базиса B функция f бесповторно выразима в B тогда и только тогда, когда $f \in B$.*

Теорема 4. *Пусть B — произвольный нормальный СЛЗ-базис и B' — произвольный нормальный базис. Тогда следующие условия равносильны:*

(a) *базис B не хуже базиса B';*

(b) *каждая функция из базиса B' бесповторно выражается в базисе B;*

(c) $B' \subseteq B$.

Доказательство. Равносильность условий (b) и (c) следует из предложения 13. Импликация (b)⇒(a) доказана О. Б. Лупановым (см. [3], лемма 1). Докажем, что из отрицания условия (b) следует отрицание условия (a). Пусть условие (b) не выполнено. Тогда существует неразделимая функция f, бесповторно выразимая в базисе B' и бесповторно не выразимая в базисе B. По предложению 1, константы, функции одного аргумента и нелинейные функции двух аргументов бесповторно выражаются в любом базисе, поэтому либо f — линейная функция двух аргументов, либо f — нелинейная функция и $\mathrm{nes}(f) \geqslant 3$.

Если f — линейная функция двух аргументов, то базис B' линейный, а базис B нелинейный. По теореме 3 либо базис B' лучше базиса B, либо базисы B и B' несравнимы. Это и есть отрицание утверждения (a).

Пусть теперь f — нелинейная функция и $\mathrm{nes}(f) \geqslant 3$. Рассмотрим базис

$$B^* = \langle B \cup \{x \oplus y\} \rangle.$$

Тогда

$$B^* = B \cup \{x \oplus y,\ x \oplus y \oplus 1\}. \tag{66}$$

Отсюда, из нелинейности функции f и соотношения $f \notin B$ следует, что $f \notin B^*$. Используя предложение 13, получим, что функция f бесповторно не выразима в базисе B^*.

По условию теоремы, базис B является СЛЗ-базисом. Тогда, в силу (66), базис B^* является СЛЗ-базисом. Применяя к базису B^* и функции f лемму 9, получим, что функция f и базис B^* согласованы.

Далее, функция f неразделима и $\mathrm{nes}(f) \geqslant 3$. Согласно предложению 7 мера устойчивости функции f не меньше двух. Применяя к функции f, базисам B' и B^* теорему 2, получим, что либо базис B' лучше базиса B^*, либо базисы B' и B^* несравнимы. Заметим, что базис B^* не хуже базиса B, поэтому либо базис B' лучше базиса B, либо базисы B и B' несравнимы. Теорема 4 доказана.

Из теоремы 4 следует теорема 5, дающая (вместе с предложением 5) алгоритм сравнения любых двух СЛЗ-базисов.

Теорема 5. *Пусть B_1 и B_2 — произвольные нормальные СЛЗ-базисы. Тогда*

(a) *если $B_1 = B_2$, то базисы B_1 и B_2 эквивалентны;*

(b) *если* $B_1 \subset B_2$, $B_1 \neq B_2$, *то базис* B_2 *лучше базиса* B_1;

(c) *если* $B_1 \supset B_2$, $B_1 \neq B_2$, *то базис* B_1 *лучше базиса* B_2;

(d) *в противном случае базисы* B_1 *и* B_2 *несравнимы;*

(e) *утверждения пунктов* (a), (b), (c) *и* (d) *обратимы.*

Определение 18. Функцию f назовем S-функцией, если f бесповторно не реализуется в базисе $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$, а любая подфункция функции f, отличная от f, бесповторно реализуется в базисе B_0.

Понятие S-функции введено В. А. Стеценко в [4], там же дана классификация S-функций с точностью до отношения обобщенной однотипности ([4], основная теорема).

Предложение 14. *Любая S-функция неразделима.*

Доказательство. Предположим противное, пусть существует разделимая S-функция f. Используя предложение 4, разложим функцию f в строго бесповторную суперпозицию неразделимых функций $f_1, \dots, f_k$. Каждая из функций $f_1, \dots, f_k$, согласно предложению 5, обобщенно однотипна с некоторой подфункцией функции f. Функция f разделима, поэтому каждая из функций $f_1, \dots, f_k$ обобщенно однотипна с некоторой подфункцией функции f, отличной от f. Отсюда и из определения S-функции следует, что каждая из функций $f_1, \dots, f_k$ бесповторно реализуется в базисе B_0. Поэтому и функция f, являющаяся строго бесповторной суперпозицией функций $f_1, \dots, f_k$, бесповторно выражается в базисе B_0, а это противоречит определению S-функции. Предложение доказано.

Определение 19. Базис B назовем S-базисом, если любая неразделимая функция, бесповторно реализуемая в базисе B и бесповторно не реализуемая в базисе B_0, является S-функцией.

Примером S-базиса является любой базис вида $B_0 \cup \{f_1, \dots, f_t\}$, где функции $f_1, \dots, f_t$ являются S-функциями.

Лемма 11. *Любая нелинейная S-функция либо связна, либо линейно забиваема. Любой S-базис является СЛЗ-базисом.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную нелинейную S-функцию f. Пусть функция f несвязна. Тогда, по предложению 11, существует подфункция функции f, обобщенно однотипная с одной из функций ψ_n, $n \geqslant 2$. Функция ψ_n является S-функцией ([4], основная теорема), следовательно, сама функция f обобщенно однотипна с функцией ψ_n.

Справедливо тождество

$$\psi_n(x_1, \dots, x_n) \equiv (x_1 \oplus x_2 \oplus 1)(x_2 \oplus x_3 \oplus 1) \dots (x_{n-1} \oplus x_n \oplus 1). \tag{67}$$

Из нелинейности функции f следует неравенство $n \geqslant 3$. Из (67) легко видеть, что при $n \geqslant 3$ функция ψ_n линейно забиваема, а значит, и функция f линейно забиваема. Первое утверждение леммы доказано.

Второе утверждение следует из первого утверждения леммы, предложения 13 и определения СЛЗ-базиса.

Определение 20. Пусть B и B_1 — произвольные базисы. Вазис B_1 назовем предплохим в базисе B, если B_1 лучше, чем B, и не существует базиса B' такого, что B' лучше, чем B, и B_1 лучше, чем B'.

Базис B является предплохим, если он предплохой в базисе $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$. Понятие предплохого базиса введено В. А. Стеценко в [4], там же дано ([4], теорема 3) необходимое условие того, что данный базис является предплохим, а также высказана гипотеза о возможном виде множества всех предплохих базисов.

Теорема 6. *Пусть B — произвольный нормальный СЛЗ-базис, f_1, f_2 — произвольные не обобщенно однотипные S-функции и $f_1 \notin B$, $f_2 \notin B$. Тогда*

(a) *базисы $B \cup \{f_1\}$ и $B \cup \{f_2\}$ являются предплохими в базисе B;*

(b) *базисы $B \cup \{f_1\}$ и $B \cup \{f_2\}$ несравнимы.*

Доказательство. Пусть $B_1 = \langle B \cup \{f_1\}\rangle$, $B_2 = \langle B \cup \{f_2\}\rangle$.

Докажем утверждение (a). Покажем, что базис $B \cup \{f_1\}$ является предплохим в B. Утверждение про базис $B \cup \{f_2\}$ аналогично. В силу предложения 5, базисы $B \cup \{f_1\}$ и B_1 эквивалентны, поэтому достаточно показать, что базис B_1 является предплохим в B. По условию теоремы базис B является СЛЗ-базисом. Отсюда и из первого утверждения леммы 10 следует, что базис B_1 также является СЛЗ-базисом. Очевидно, что $B \subset B_1$, $B \neq B_1$, поэтому в силу теоремы 5 базис B_1 лучше базиса B.

Рассмотрим теперь произвольный базис B' такой, что B' лучше, чем B, и B_1 не хуже, чем B'. Покажем, что тогда базис B' эквивалентен базису B_1 и, тем самым, завершим доказательство утверждения (a). Для этого достаточно показать, что базис $B^* = \langle B'\rangle$ эквивалентен базису B_1.

Базис B_1 не хуже, чем B^*. Применяя теорему 4 (имея в виду, что базис B_1 является СЛЗ-базисом), получим, что

$$B^* \subseteq B_1. \tag{68}$$

Из (68) следует, что базис B^* является СЛЗ-базисом. Далее, базис B^* лучше базиса B, и оба они являются нормальными СЛЗ-базисами. Тогда из теоремы 5 следует, что

$$B \subset B^*, \qquad B \neq B^*. \tag{69}$$

Заметим, что множество B_1 можно разбить на две непересекающиеся части, $B_1 = B \cup \Phi$ и $B \cap \Phi = \varnothing$, где множество Φ состоит из всех функций, обобщенно однотипных с функцией f_1. Отсюда и из (68) и (69) следует, что множество B^* также можно разбить на две непересекающиеся части, $B^* = B \cup \Phi'$ и $B \cap \Phi' = \varnothing$, где Φ' — непустое подмножество множества Φ. Тогда, в силу нормальности базиса B^*, множество Φ' совпадает с множеством Φ, т.е. $B^* = B_1$, а значит, базисы B^* и B_1 эквивалентны.

Докажем утверждение (b). По условию леммы, функции f_1 и f_2 не обобщенно однотипны, $f_1 \notin B$, $f_2 \notin B$. Поэтому для базисов B_1 и B_2 не выполнено ни одно из соотношений $B_1 = B_2$, $B_1 \subset B_2$, $B_1 \supset B_2$. Заметим также, что базисы B_1 и B_2 являются СЛЗ-базисами. Применяя теорему 5, получим, что базисы B_1 и B_2 несравнимы. Следовательно, базисы $B \cup \{f_1\}$ и $B \cup \{f_2\}$ несравнимы.

Теорема 6 доказана.

Теорема 7. *Существует бесконечное множество попарно несравнимых булевых базисов. Примером такого множества является множество, состоящее из базисов* $\{\&, \vee, \neg, \psi_n\}$, $n = 2, 3, \ldots$

В. А. Стеценко доказал ([4], теорема 3), что любой предплохой базис эквивалентен одному из базисов вида $\{\&, \vee, \neg, f\}$, где f является S-функцией. Из этого результата, классификации S-функций с точностью до отношения обобщенной однотипности ([4], основная теорема) и теоремы 6 вытекает следующая основная теорема работы, дающая классификацию предплохих базисов.

Теорема 8. *Базис B является нормальным предплохим базисом тогда и только тогда, когда $B = \langle\{\&, \vee, \neg, f\}\rangle$, где f — одна из функций*

$$x_1x_2\ldots x_n \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_n, \qquad n \geqslant 2,$$
$$x_1(x_2 \vee \ldots \vee x_n) \vee x_2\ldots x_n, \qquad n \geqslant 3,$$
$$x_1(x_2 \vee x_3\ldots x_n) \vee x_2\overline{x}_3\ldots\overline{x}_n, \qquad n \geqslant 3,$$
$$x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4, \qquad x_1(x_3x_4 \vee x_5) \vee x_2(x_3 \vee x_4x_5).$$

Любые два различных нормальных предплохих базиса неэквивалентны. Произвольный базис B' является предплохим тогда и только тогда, когда базис $\langle B'\rangle$ является нормальным предплохим базисом.

Автор выражает глубокую благодарность О. Б. Лупанову, под чьим руководством выполнена данная работа, а также Н. А. Карповой, чьи замечания способствовали неоднократной ее переработке.

Список литературы

1. Кузнецов А. В. О бесповторных контактных схемах и бесповторных суперпозициях функций алгебры логики. *Труды МИАН СССР* (1958) **51**, 186–225.
2. Лупанов О. Б. О сложности реализации функций алгебры логики формулами. *Пробл. киберн.* (1960) **3**, 61–80.
3. Субботовская Б. А. О сравнении базисов при реализации функций алгебры логики формулами. *Докл. АН СССР* (1963) **149**, №4, 784–787.
4. Стеценко В. А. О предплохих базисах в P_2. *Матем. вопросы киберн.* (1992) **4**, 139–177.

Статья поступила 11.01.1999.

«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА», 1999, ТОМ 11, ВЫПУСК 2

Заведующая редакцией *Л. М. Барыкина*
Технический редактор *Н. Н. Беляева*

Сдано в набор 20.04.1999. Подписано к печати 25.05.1999. Формат 70 × 100/16.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,0. Усл. кр.-отт. 3,6 тыс. Уч.-изд. л. 12,6. Бум. л. 5,0.
Тираж 274 экз. Заказ №2611.

Адрес редакции: 117966 г. Москва ГСП-1, ул. Губкина, д. 8, комн. 622. Тел. 938 37 00.

Отпечатано в типографии «Наука»
121099 г. Москва Г-99, Шубинский пер., д. 6.