УДК 519.714

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ

Д. Ю. Черухин

Рассмотрена задача о перемещении по сети веществ разных сортов. В случае двух сортов и неориентированной сети доказано утверждение, аналогичное теореме Форда-Фалкерсона. Для произвольного числа сортов дан критерий существования потока, опирающийся на принцип двойственности линейного программирования.

0. Сеть и поток. Введём понятие *n-транспортной сети.* Пусть Γ — конечный неориентированный граф с множеством вершин V и множеством рёбер E. Далее, пусть n — натуральное число и $W = (v_1^-, \dots, v_n^-,\ v_1^+, \dots, v_n^+)$ — набор различных вершин из V; вершина v_i^- $(i = 1, \dots, n)$ называется *i-м источником*, а вершина v_i^+ — *i-м стоком*; источники и стоки называются *полюсами.* Наконец, пусть $c\colon E \to \mathbb{R}_+$ — функция, сопоставляющая каждому ребру e графа Γ неотрицательное число $c(e)$ — его *пропускную способность.* Тогда набор (Γ, W, c) называется n-транспортной сетью.

Рассмотрим следующую задачу. Даны n-транспортная сеть $S = (\Gamma, W, c)$ и набор неотрицательных чисел $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$. Требуется переместить по сети S вещества n сортов; при этом вещество i-го сорта $(i = 1, \dots, n)$ перемещается из i-го источника в i-й сток в количестве ψ_i единиц; вещества перемещаются по рёбрам; по одному и тому же ребру вещества могут перемещаться в разных направлениях, но суммарное количество перемещённого вещества по ребру e не превосходит $c(e)$ единиц (суммирование ведётся без учёта направления, т. е. по модулю). Вопрос: при каких условиях на S и ψ такое перемещение возможно?

При $n = 1$ ответ на этот вопрос получен Фордом и Фалкерсоном [1]; более того, аналогичная задача решена ими для ориентированной сети (для каждого ребра которой указано направление перемещения). При $n = 2$ утверждение, аналогичное теореме Форда-Фалкерсона, доказано в данной статье; начиная с $n = 3$ (а в случае ориентированной сети — начиная с $n = 2$) аналогичное утверждение неверно; в статье приводятся контрпримеры.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Пусть $S = (\Gamma, W, c)$ — n-транспортная сеть. Будем считать, что граф Γ не содержит кратных рёбер, что не сужает поставленной задачи, поскольку группу кратных рёбер можно заменить одним ребром, просуммировав их пропускные способности. Вектор-функция $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, где $\varphi_i\colon V^2 \to \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$), называется (*допустимым*) *потоком* в сети S, если выполнены следующие условия (в которых v, w — произвольные вершины из V, $i = 1, \dots, n$):

1) если v и w не соединены ребром, то $\varphi_i(v, w) = 0$;
2) $\varphi_i(v, w) = -\varphi_i(w, v)$;
3) если $v \neq v_i^+$ и $v \neq v_i^-$, то $\sum\limits_{v' \in V} \varphi_i(v, v') = 0$;
4) $\sum\limits_{v' \in V} \varphi_i(v_i^-, v') \geqslant 0$;
5) для любого ребра $e \in E$ с концами v и w выполнено $\sum\limits_{j=1}^{n} |\varphi_j(v, w)| \leqslant c(e)$.

Вектор $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, где

$$\psi_i = \sum_{v' \in V} \varphi_i(v_i^-, v'), \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

называется *величиной* потока φ. Вектор ψ, являющийся величиной некоторого потока в данной сети S, называется *допустимым для* S. Множество всех допустимых векторов для S обозначим через Ψ.

Число $\varphi_i(v, w)$ интерпретируется как количество вещества i-го сорта, перемещённого по ребру из вершины v в вершину w. При этом поставленная выше задача звучит так: при каких условиях вектор ψ допустим для сети S или так: описать множество всех допустимых векторов для данной сети S.

1. Простейшие свойства потока. Пусть $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, $E' \subseteq E$. Скажем, что множество рёбер E' является *I-сечением* сети S, если для любого $i \in I$ любой путь, соединяющий вершину v_i^- с вершиной v_i^+, пересекается с множеством E'. Если ребро e имеет концами вершины v и w, то обозначим $\varphi_i(e) = |\varphi_i(v, w)|$.

Утверждение 1. а) $\forall i\ \psi_i \geqslant 0$;
б) $\forall i\ \sum\limits_{v' \in V} \varphi_i(v_i^+, v') = -\psi_i$;
в) *для любого I-сечения E' выполнено*

$$\sum_{i \in I} \psi_i \leqslant \sum_{e \in E'} c(e). \tag{2}$$

Доказательство. а) следует из условия 4) в определении потока;

б)

$$0 = \sum_{v,v' \in V} \varphi_i(v,v') = \sum_{v \notin \{v_i^-, v_i^+\}} \sum_{v' \in V} \varphi_i(v,v') + \sum_{v' \in V} \varphi_i(v_i^-, v') + \sum_{v' \in V} \varphi_i(v_i^+, v') =$$

$$= 0 + \psi_i + \sum_{v' \in V} \varphi_i(v_i^+, v').$$

в) При удалении всех рёбер из множества E' сеть распадается на компоненты связности, причём для любого $i \in I$ вершины v_i^- и v_i^+ лежат в разных компонентах. Пусть $i \in I$, V_i — множество всех вершин, лежащих в той же компоненте, что и v_i^-, E'_i — множество тех рёбер из E', ровно один конец которых содержится в множестве V_i. Тогда

$$\psi_i = \sum_{v \in V_i, v' \in V} \varphi_i(v,v') = \sum_{v,v' \in V_i} \varphi_i(v,v') + \sum_{v \in V_i, v' \in V \setminus V_i} \varphi_i(v,v') \leqslant$$

$$\leqslant 0 + \sum_{v \in V_i, v' \in V \setminus V_i} |\varphi(v,v')| = \sum_{e \in E'_i} \varphi_i(e) \leqslant \sum_{e \in E'} \varphi_i(e).$$

Суммируя по всем $i \in I$, получим

$$\sum_{i \in I} \psi_i \leqslant \sum_{e \in E'} \sum_{i \in I} \varphi_i(e) \leqslant \sum_{e \in E'} c(e).$$

Утверждение 1 доказано.

2. Теоремы о максимальном потоке. Ограничения на допустимый вектор в данной сети, содержащиеся в пп. а), в) утв. 1, назовём *естественными*. Множество всех векторов, удовлетворяющих естественным ограничениям для сети S, обозначим через Ψ_0. Теорему Форда-Фалкерсона можно переформулировать следующим образом.

Теорема 1 [1]. *Если $n = 1$, то $\Psi = \Psi_0$. Другими словами, вектор ψ допустим в данной сети тогда и только тогда, когда он удовлетворяет всем естественным ограничениям.*

Мы докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Если $n = 2$, то $\Psi = \Psi_0$.*

Далее в пп. 3–5 мы докажем вспомогательные утверждения, в п. 6 завершим доказательство теоремы 2, в п. 7 приведём критерий существования потока данной величины ψ для произвольного n. Наконец, в п. 8 приведём контрпримеры. До конца доказательства теоремы 2 будем предполагать, что $n=2$, если не оговорено противное.

3. Свойства множеств на плоскости. Множество $M \subseteq \mathbb{R}_+^2$ назовём *монотонным*, если для любых $0 \leqslant x_1 \leqslant y_1$ и $0 \leqslant x_2 \leqslant y_2$ из того, что $(y_1, y_2) \in M$ следует $(x_1, x_2) \in M$. Пусть $z = (z_1, z_2)$, $z_1 \geqslant 0$, $z_2 \geqslant 0$, $z \neq (0,0)$. Точку $x \in M$ назовём *граничной точкой по направлению* z, если для любого $\varepsilon > 0$ выполнено $x + \varepsilon z \notin M$; точку x назовём *верхнеграничной*, если она гранична по некоторому направлению; точку x назовём *крайней*, если она гранична по направлениям $(1,0)$ и $(0,1)$.

Утверждение 2. а) *множество Ψ монотонно, компактно и выпукло*;

б) *множество Ψ_0 монотонно и выпукло*;

в) *ограничения множеств Ψ и Ψ_0 на каждую координатную ось совпадают*;

г) *если X, Y — монотонные, выпуклые множества, X замкнуто, $X \subseteq Y$, $X \neq Y$ и ограничения множеств X, Y на каждую координатную ось совпадают, то в X найдётся крайняя точка, не являющаяся верхнеграничной для Y*;

д) *если точка $\psi \in \Psi_0$ такова, что хотя бы в одном неравенстве (2) достигается равенство, то ψ верхнегранична для множества Ψ_0.*

Доказательство. а) Докажем монотонность. Пусть имеется поток величины (y_1, y_2) и $0 \leqslant x_i \leqslant y_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда, уменьшив i-ю координату потока на каждом ребре в y_i/x_i раз для $i = 1, 2$, мы получим поток величины (x_1, x_2) (если $x_i = 0$, то соответствующую координату обнулим).

Докажем компактность и выпуклость. Рассмотрим поток в данной сети, как вектор из пространства $\mathbb{R}^{|V|^2 \cdot 2}$ с координатами $\varphi_i(v, w)$ $(i = 1, 2,\ v, w \in V)$. Заметим, что условия 1)-5) из определения потока можно переписать в виде конечной системы линейных уравнений и нестрогих линейных неравенств (условие $|a| \leqslant b$ равносильно системе $a \leqslant b,\ -a \leqslant b$), поэтому множество всех потоков замкнуто и выпукло. В то же время, каждая координата потока ограничена, значит множество всех потоков ограничено. Таким образом, множество всех потоков компактно. Отображение (1), сопоставляющее потоку его величину, линейно, а значит непрерывно; непрерывный образ компакта — компакт, линейный образ выпуклого множества выпукл (так как линейное отображение отрезки переводит в отрезки). Поэтому множество всех допустимых векторов данной сети компактно и выпукло.

б) Каждое из естественных ограничений (2) задаёт в первом квадранте монотонное выпуклое множество, поэтому их пересечение и ограничение на первый квадрант (даваемое п. а) утв. 1) есть монотонное выпуклое множество.

в) Если, например, первую координату величины потока приравнять к нулю, то первую координату во всём потоке можно считать равной нулю и тем самым мы сведём задачу к одномерной, т. е. случаю $n = 1$. Согласно теореме 1, в этом случае $\Psi = \Psi_0$.

г) Пусть $x = (x_1, x_2) \in Y$, но $x \notin X$. Заметим, что так как X и Y совпадают на координатных осях, то x не лежит на них, т. е. $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$. В силу монотонности, $(0,0) \in Y$. Множества X, Y совпадают на координатных осях, значит, $(0,0) \in X$. Тогда пересечение $X \cap [0, x]$ замкнуто и непусто, следовательно, существует максимальное α такое, что $\alpha x \in X$. Пусть $y = \alpha x = (y_1, y_2)$. Покажем, что y — искомая точка.

Так как $x \in Y$, то, в силу монотонности, прямоугольник $[0, x_1] \times [0, x_2]$ целиком содержится в Y. Если $\alpha \neq 0$, то точка y лежит внутри этого прямоугольника и не может быть граничной для Y; если же $\alpha = 0$, то заметим, что пересечение окружности достаточно малого радиуса с центром в начале координат и первого квадранта целиком лежит в этом прямоугольнике, а значит, точка y не гранична для Y ни по одному направлению, т. е. не верхнегранична.

Далее, предположим, что y — не крайняя точка для X. Можно считать, что для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнено $(y_1 + \varepsilon, y_2) \in X$. Так как $x \in Y$, то $(0, x_2) \in Y$, а в силу того, что множества X и Y совпадают на оси OY, имеем $(0, x_2) \in X$. Наконец из выпуклости множества X следует, что отрезок с концами в точках $(y_1 + \varepsilon, y_2)$ и $(0, x_2)$ целиком содержится в X; кроме того, $x_2 > y_2$. Из геометрических соображений ясно, что на этом отрезке найдётся точка вида $\alpha' x$ для $\alpha' > \alpha$. Последнее противоречит выбору α. Таким образом, y — крайняя точка для множества X.

д) Пусть $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ и неравенство, в котором достигается равенство, имеет вид

$$\alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 \leqslant c. \tag{3}$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Заметим, что $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$ и $\alpha \neq (0,0)$. Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим вектор $\psi' = \psi + \alpha\varepsilon = (\psi_1', \psi_2')$. Имеем

$$\alpha_1 \psi_1' + \alpha_2 \psi_2' = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \varepsilon(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) > c,$$

т. е. точка ψ' не удовлетворяет условию (3), а значит, не принадлежит множеству Ψ_0. Итак, точка ψ гранична для Ψ_0 по направлению α, следовательно, верхнегранична.

Утверждение 2 доказано.

4. Приведённый поток. В данном пункте считаем n произвольным. Пусть путь П проходит ребро e по направлению от вершины v к вершине v' (v

и v' — концы ребра e). Тогда скажем, что вектор $\varphi(v, v')$ является *потоком на ребре e вдоль пути* Π. Если путь Π проходит ребро e несколько раз, то будем говорить о потоке на e для каждого отдельного вхождения ребра e в путь Π. Ребро e назовём *положительно* [*отрицательно*] *ориентированным* для пути Π, если существует вхождение ребра e в Π, для которого обе координаты потока на e неотрицательны [неположительны]. Путь Π назовём *i-монотонным* ($i = 1, 2$), если для любого вхождения любого ребра e в путь Π i-я координата потока на e положительна. Скажем, что вершина v является *i-вершиной*, если хотя бы для одной вершины v' выполнено $\varphi_i(v, v') \neq 0$.

Поток назовём *приведённым*, если ни для какого i не существует i-монотонного цикла. Поток φ назовём *элементарным*, если для некоторого i существует простой путь Π из вершины v_i^- в вершину v_i^+, такой, что:

i) путь Π является i-монотонным;

ii) для любых вершин v, v' и любого $j \neq i$ выполнено $\varphi_j(v, v') = 0$;

iii) для любого ребра e, не входящего в путь Π, выполнено $\varphi_i(e) = 0$.

Скажем, что поток φ' является *подпотоком* потока φ, если для любых i, v, v' из неравенства $\varphi'_i(v, v') > 0$ следует $\varphi_i(v, v') > \varphi'_i(v, v')$.

Утверждение 3. а) *Для любого потока φ существует приведённый поток φ' с той же величиной, являющийся подпотоком потока φ.*

б) *Любой приведённый поток представим в виде суммы конечного числа своих элементарных подпотоков:*

$$\varphi = \varphi^1 + \ldots + \varphi^k. \tag{4}$$

в) *В приведённом потоке для любой i-вершины v существует i-монотонный путь из v_i^- в v_i^+, проходящий через v.*

Доказательство. а) Пусть в потоке φ существует i-монотонный цикл C. Возьмём в качестве ε минимальное из чисел $\varphi_i(e)$ по всем рёбрам e, входящим в цикл C. Уменьшим на ε i-ю координату потока вдоль цикла C на всех рёбрах из C. При этом мы получим поток той же величины и хотя бы на одном из рёбер число $\varphi_i(e)$ станет равным нулю. Следовательно, за конечное число описанных операций мы добьёмся того, чтобы поток стал приведённым. Очевидно, что на каждом шаге ни одно из чисел $\varphi_i(v, w)$ не увеличивается по модулю и не меняет знак. Значит, мы получим подпоток исходного потока.

б) Если величина потока φ отлична от нулевого вектора (например, $\psi_i \neq 0$), то построим простой i-монотонный путь Π из v_i^- в v_i^+. Для этого, стартуя с вершины v_i^-, будем последовательно выбирать рёбра так, чтобы i-монотонность не нарушалась (это можно сделать в силу сохранения количества вещества), пока не дойдём до вершины v_i^+. В процесе построения пути мы не можем зациклиться, так как i-монотонных циклов не существует в силу приведённости потока.

Далее, пусть ε — минимальное из чисел $\varphi_i(e)$ по всем рёбрам e из пути Π. Рассмотрим элементарный поток φ^1, состоящий в перенесении ε единиц i-го вещества вдоль пути Π. Положим $\varphi^{(1)} = \varphi - \varphi^1$. Заметим, что потоки φ^1 и $\varphi^{(1)}$ являются подпотоками потока φ и поток $\varphi^{(1)}$ приведён как подпоток приведённого потока. Кроме того, хотя бы для одного ребра e число $\varphi_i(e)$ отлично от нуля, а $\varphi_i^{(1)}(e) = 0$. Поэтому, повторив описанную процедуру конечное число раз, мы представим φ в виде суммы $\varphi = \varphi^1 + \ldots + \varphi^k + \varphi^{(k)}$, в которой каждый из потоков φ^j является подпотоком потока φ, а величина потока $\varphi^{(k)}$ есть нулевой вектор. Поток $\varphi^{(k)}$ тождественно равен нулю, так как в противном случае в нём для некоторого i нашёлся бы i-монотонный цикл, что противоречит приведённости.

в) Воспользуемся представлением (4). Для некоторого элементарного потока φ^j вершина v является i-вершиной. Пусть Π — i-монотонный путь потока φ^j (он единственен). В силу того, что φ^j является подпотоком потока φ, путь Π будет i-монотонным также для φ.

Утверждение 3 доказано.

5. Нагруженные рёбра. Пусть в сети S имеется поток φ. Ребро e назовём *нагруженным*, если $\varphi_1(e) + \varphi_2(e) = c(e)$. Если при этом $\varphi_1(e) > 0$ и $\varphi_2(e) > 0$, то ребро e назовём 2-*нагруженным*, а в противном случае — 1-*нагруженным*. Поток φ назовём *критическим*, если:

i) его величина ψ является крайней точкой множества Ψ;

ii) число нагруженных рёбер в нём минимально среди всех потоков, удовлетворяющих свойству i);

iii) число 2-нагруженных рёбер в нём максимально среди всех потоков, удовлетворяющих свойствам i) и ii).

Назовём i-*инверсией* ($i = 1, 2$) следующее преобразование сети и потока: для любых v, v' число $\varphi_i(v, v')$ заменяется на $-\varphi_i(v, v')$ и меняются местами вершины v_i^- и v_i^+. При i-инверсии поток остаётся потоком, сохраняются: его величина, нагруженные рёбра, критичность, приведённость.

Утверждение 4. а) *Пусть для любых $i, j \in \{1, 2\}$ в любом пути Π, ведущем из вершины v_i^- в v_j^+, присутствует положительно ориентированное нагруженное ребро. Тогда на величине ψ рассматриваемого потока хотя бы одно из неравенств (2) обращается в равенство.*

б) *Пусть рассматриваемый поток критический, C — контур (замкнутый путь) и в C имеется положительно ориентированное нагруженное ребро e.*

Тогда в контуре C найдётся отрицательно ориентированное нагруженное ребро e'.

в) *Пусть рассматриваемый поток критический и приведённый, Π — путь, начинающийся с вершины v_i^-, и e — первое нагруженное ребро, встреченное на пути Π. Тогда i-я координата потока на ребре e для первого вхождения e в Π неотрицательна.*

г) *Пусть рассматриваемый поток критический и приведённый, любые два полюса сети соединены путём, но в любом пути, соединяющем различные полюса, имеется нагруженное ребро. Тогда с помощью инверсий можно изменить сеть и поток так, чтобы выполнялось условие: для любых $i, j \in \{1,2\}$ существует путь Π, ведущий из вершины v_i^- в вершину v_j^+, такой, что в Π имеется положительно ориентированное нагруженное ребро и отсутствуют отрицательно ориентированные нагруженные рёбра.*

Доказательство. а) Обозначим через V_0 множество концов всех путей Π, начинающихся с вершин v_1^-, v_2^-, и не содержащих положительно ориентированных нагруженных рёбер. Вершины v_1^+, v_2^+ не принадлежат множеству V_0. Обозначим через E' множество всех таких рёбер, один конец которых принадлежит множеству V_0, а другой — нет. Имеем:

$$\sum_{i=1,2} \psi_i = \sum_{v \in V_0, v' \in V \setminus V_0} \sum_{i=1,2} \varphi_i(v,v') = \sum_{v \in V_0, v' \in V \setminus V_0} \sum_{i=1,2} |\varphi_i(v,v')| = \sum_{e \in E'} c(e). \quad (5)$$

Мы видим, что правая и левая части равенства (5) являются, соответственно, правой и левой частью одного из неравенств (2); множество E', очевидно, является $\{1,2\}$-сечением.

б) Вначале рассмотрим случай, когда C — цикл, т. е. не содержит повторяющихся рёбер. Предположим противное: поток на любом нагруженном ребре вдоль C имеет хотя бы одну положительную координату. Произведём с потоком в цикле C следующее преобразование: уменьшим каждую координату потока на всех рёбрах вдоль цикла C на одно и то же достаточно маленькое число ε. Покажем, что преобразованный поток является потоком. Требования 1)–4) из определения потока, очевидно, выполнены.

Если ребро не нагружено, т. е. в неравенстве 5) из определения потока не достигается равенства, то при достаточно малом ε неравенство сохранится и равенство также не будет достигаться. Если ребро нагружено, то хотя бы одна координата потока на нём (вдоль C) положительна (если обе координаты нулевые, то ребро не может быть нагружено); если другая координата также положительна, то при достаточно малом ε сумма абсолютных величин координат потока на этом ребре уменьшится, неравенство 5) будет выполнено, а ребро перестанет быть нагруженным; если другая координата нулевая или отрицательная, то абсолютная величина первой координаты уменьшится, а второй — увеличится на ту же величину, сумма останется постоянной и неравенство 5) будет выполнено. Итак, преобразованный поток является потоком.

Заметим, что величина нового потока совпадает с величиной исходного. По условию, в цикле C имеется нагруженное ребро e, обе координаты исходного потока на котором (вдоль C) неотрицательны. Если эти координаты положительны, то в новом потоке ребро e перестанет быть нагруженным, что противоречит критичности исходного потока. Если же одна координата положительна, а другая равна нулю, то ребро из 1-нагруженного превратится в 2-нагруженное, что также противоречит критичности исходного потока. Противоречие. Случай, когда C — цикл, рассмотрен.

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть в контуре C некоторая вершина v встречается более одного раза. Выделим два её вхождения в контур C, и C разобьём на два контура: C_1 — от первого вхождения вершины v до второго и C_2 — от второго вхождения до первого. Выберем тот из контуров C_1, C_2, в котором ребро e проходится в нужном нам направлении (когда все координаты потока на нём неотрицательны). Продолжим процесс до тех пор, пока не получим контур C', в котором вершины не повторяются. Если C' имеет длину 2, т. е. проходит по ребру e в двух направлениях, то ребро e при прохождении в обратном направлении будет искомым e'. Если же C' имеет длину, большую чем 2, то C' является циклом и для него утверждение доказано.

в) Пусть v, v' — концы ребра e, причём путь Π сначала проходит вершину v, а затем v'. Обозначим через Π' участок пути Π от v_i^- до вершины v, пройденный в обратном направлении (от v до v_i^-). Предположим, что утверждение не выполнено, т. е. $\varphi_i(v,v') < 0$. Вершина v' является i-вершиной, поэтому, как следствие п. в) утв. 3, существует простой i-монотонный путь Π'' из v_i^- в v'. Построим контур C: пройдём по пути Π'', затем по ребру e, затем по пути Π'.

С помощью j-инверсии ($j \neq i$) можно добиться того, чтобы выполнялось $\varphi_j(v',v) \geqslant 0$. Мы получим, что в контуре C имеется положительно ориентированное нагруженное ребро e; в то же время, отсутствуют отрицательно ориентированные нагруженные рёбра: действительно, на пути Π'' и ребре e i-я координата потока положительна, а на пути Π' нет нагруженных рёбер. Получили противоречие с п. б).

г) Рассмотрим два случая: 1) существует 2-нагруженное ребро; 2) не существует 2-нагруженных рёбер.

Случай 1. Пусть e — 2-нагруженное ребро с концами v и w. С помощью инверсий можно добиться выполнения неравенств $\varphi_1(v,w) > 0$, $\varphi_2(v,w) > 0$.

Рассмотрим произвольные $i, j \in \{1, 2\}$. Вершины v и w являются 1- и 2-вершинами. Поэтому, вследствие п. в) утв. 3, существуют i-монотонный путь Π^- из вершины v_i^- в v и j-монотонный путь Π^+ из w в вершину v_j^+. Искомый путь Π образуем из пути Π^-, ребра e и пути Π^+. Ребро e нагружено и положительно ориентировано для Π. В то же время на всех рёбрах вдоль Π хотя бы одна координата потока положительна, поэтому в Π отрицательно ориентированных рёбер нет.

Случай 2. По условию утверждения любые полюса соединены между собой путями; значит, обе координаты величины потока ненулевые, поэтому i-ые источник и сток являются i-вершинами; кроме того, v_1^- соединена путём с v_2^+, т. е. некоторая 1-вершина соединена путём с некоторой 2-вершиной. Рассмотрим кратчайший путь Π_0, соединяющий некоторую 1-вершину v_1 с некоторой 2-вершиной v_2 (возможно, Π имеет нулевую длину). В силу минимальности, на каждом ребре пути Π_0 обе координаты потока равны нулю.

Также, как в случае 1, рассмотрим произвольные $i, j \in \{1, 2\}$. Существуют i-монотонный путь Π^-, ведущий из v_i^- в v_i, и j-монотонный путь Π^+, ведущий из v_j в v_j^+. Образуем путь Π: если $i = j$, то Π состоит из Π^- и Π^+; если $i \neq j$, то Π состоит из Π^-, Π_0 и Π^+. В пути Π нет отрицательно ориентированных нагруженных рёбер: действительно, на участках Π^-, Π^+ хотя бы одна координата потока положительна, а на участке Π_0 нет нагруженных рёбер. В то же время, по условию утверждения, в пути Π (соединяющем полюса) есть нагруженное ребро e. В силу условия случая 2, ребро e является 1-нагруженным. Но единственная ненулевая координата потока на e должна быть положительна вдоль Π, поэтому e положительно ориентировано вдоль Π.

Утверждение 4 доказано.

6. Завершение доказательства теоремы 2. Рассмотрим два случая: 1) существуют два полюса, не соединённые путём; 2) любые два полюса соединены путём.

Случай 1. Если для некоторого i полюса v_i^- и v_i^+ не соединены путём, то множество Ψ сконцентрировано на одной координатной оси; мы знаем (п. в) утв. 2), что множества Ψ и Ψ_0 совпадают на координатных осях, следовательно, $\Psi = \Psi_0$. Если же для любого i полюса v_i^- и v_i^+ соединены путём, то в силу условия случая 1, для некоторых $\sigma, \tau \in \{+, -\}$ полюса v_1^σ и v_2^τ не соединены путём; тогда для любых σ, τ полюса v_1^σ и v_2^τ не соединены путём, т. е. сеть распадается на две несвязные компоненты S_1 и S_2, где S_i содержит полюса v_i^- и v_i^+. Потоки в сетях S_1, S_2 можно считать одномерными. Заметим, что множества Ψ и Ψ_0 для всей сети есть декартовы произведения соответствующих одномерных множеств для сетей S_1 и S_2, значит, из совпадения множеств

Ψ и Ψ_0 на координатных осях следует их совпадение всюду, т. е. теорема 2 доказана.

Случай 2. Предположим, что теорема 2 неверна, т. е. $\Psi \neq \Psi_0$. Применим п. г) утв. 2 к множествам $X = \Psi$, $Y = \Psi_0$; это можно сделать, так как в силу пп. а), б) утв. 2 множества Ψ, Ψ_0 монотонны и выпуклы, а Ψ замкнуто; кроме того, в силу п. в) утв. 2 множества Ψ и Ψ_0 совпадают на координатных осях, а в силу пп. а), в) утв. 1, $\Psi \subseteq \Psi_0$. Получим, что существует крайняя точка ψ множества Ψ, не являющаяся верхнеграничной для Ψ_0. Из п. д) утв. 2 следует, что в точке ψ ни одно из неравенств (2) не обращается в равенство.

Существует критический поток φ мощности ψ. В силу п. а) утв. 3 можно считать, что поток φ приведён. Путь, содержащий хотя бы одно нагруженное рёбро, назовём *жёстким*. Рассмотрим два подслучая: 2.1) существуют два полюса, соединённых нежёстким путём; 2.2) любой путь, соединяющий два различных полюса, является жёстким.

Случай 2.1. Так как точка ψ крайняя, то мощность потока φ нельзя увеличить ни по одной из координат, следовательно, любой путь из v_i^- в v_i^+ $(i = 1, 2)$ является жёстким. Значит, существует нежёсткий путь Π_0, соединяющий вершины вида v_1^σ и v_2^τ $(\sigma, \tau \in \{+, -\})$. С помощью инверсий можно добиться того, чтобы выполнялось $\sigma = \tau = -$. Так как вершины v_1^- и v_2^- соединены нежёстким путём, а любой путь, соединяющий v_i^- и v_i^+ $(i = 1, 2)$, жёсток, то любой путь Π, соединяющий вершину v_i^- с вершиной v_j^+ $(i, j \in \{1, 2\})$, жёсток.

Пусть e_Π — первое нагруженное ребро, встреченное на пути Π, считая от вершины v_i^-. Тогда, в силу п. в) утв. 4, i-я координата потока на ребре e_Π вдоль пути Π неотрицательна. Рассмотрим путь Π', являющийся объединением путей Π_0 и Π. Путь Π' начинается с вершины $v_{i'}^-$ $(i' \neq i)$ и e_Π — первое, встреченное на нём нагруженное ребро. Согласно п. в) утв. 4, i'-я координата потока на ребре e_Π вдоль пути Π' (а значит, и вдоль пути Π) неотрицательна. Итак, в любом пути Π, соединяющем вершину v_i^- с вершиной v_j^+ $(i, j \in \{1, 2\})$, имеется положительно ориентированное нагруженное ребро. Тогда, в силу п. а) утв. 4, в точке ψ хотя бы одно из неравенств (2) обращается в равенство. Противоречие.

Случай 2.2. Применим п. г) утв. 4; это можно сделать, так как по условию случаев 2 и 2.2 любые два полюса соединены путём, но в любом пути, соединяющем разные полюса, есть нагруженное ребро; кроме того, поток φ критический и приведённый. После необходимых инверсий получим совокупность путей $\Pi_{i,j}$ $(i, j \in \{1, 2\})$, таких, что $\Pi_{i,j}$ ведёт из вершины v_i^- в v_j^+, содержит положительно ориентированное нагруженное ребро и не содержит отрицательно ориентированных нагруженных рёбер.

Рассмотрим произвольные $i, j \in \{1, 2\}$ и произвольный путь Π, ведущий из

v_i^- в вершину v_j^+. Пусть Π' — путь Π, пройденный в обратном направлении. Из путей $\Pi_{i,j}$ и Π' образуем контур C. В нём имеется положительно ориентированное нагруженное ребро, следовательно, по п. б) утв. 4 в C должно быть отрицательно ориентированное нагруженное ребро e'; ребро e' не принадлежит участку $\Pi_{i,j}$, следовательно, e' принадлежит пути Π'. Это же ребро e' будет для пути Π положительно ориентированным. Итак, в любом пути, ведущем из вершины v_i^- в v_j^+, имеется положительно ориентированное нагруженное ребро. В силу п. а) утв. 4 заключаем, что в точке ψ хотя бы одно из неравенств (2) обращается в равенство. Противоречие.

Теорема 2 доказана.

7. Двойственная задача. В данном пункте мы докажем критерий существования потока данной величины для произвольного n, сводящий задачу к двойственной с точки зрения линейного программирования. Пусть S — сеть и ρ: $E \to \mathbb{R}_+$ — функция, сопоставляющая каждому ребру e его *длину* $\rho(e)$. Тогда набор $\bar{S} = (S, \rho)$ назовём *метрической сетью.* Длиной пути Π в метрической сети назовём сумму длин рёбер, входящих в этот путь с учётом кратности вхождений; расстоянием между вершинами v, v' назовём минимальную из длин путей, соединяющих v и v', обозначим её $\rho(v, v')$; если вершины v, v' не соединены путём, положим $\rho(v, v') = +\infty$. Обозначим $\rho_i = \rho(v_i^-, v_i^+)$.

Напомним принцип двойственности линейного программирования [2]. Пусть A — матрица размера $p \times q$; b, x — вектора длины p; c, y — вектора длины q (x, y — неизвестные). Тогда задача

$$Ax^T \leqslant c^T,\ x \geqslant 0, \qquad bx^T \to \max \tag{6}$$

двойственна к задаче

$$A^T y^T \geqslant b^T,\ y \geqslant 0, \qquad cy^T \to \min\,. \tag{7}$$

Двойственные задачи одновременно имеют или не имеют решения и если имеют, то максимум задачи (6) совпадает с минимумом задачи (7).

Теорема 3. *Вектор ψ допустим для сети S тогда и только тогда, когда для любой метрической сети $\bar{S} = (S, \rho)$ выполнено неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i \rho_i \leqslant \sum_{e \in E} c(e) \rho(e). \tag{8}$$

Доказательство. **Необходимость.** Пусть φ — поток мощности ψ; φ можно считать приведённым. В силу п. б) утв. 3 поток φ представим в виде суммы конечного числа элементарных подпотоков (4). Для каждого $i = 1, \ldots, n$

обозначим через $\varphi^{i,1},\dots,\varphi^{i,k_i}$ те из подпотоков (4), в которых существует i-монотонный путь из v_i^- в v_i^+. Указанный i-монотонный путь для потока $\varphi^{i,j}$ обозначим через $\Pi^{i,j}$, а i-ю координату мощности потока $\varphi^{i,j}$ обозначим через $\psi^{i,j}$. Напомним, поток $\varphi^{i,j}$ состоит в перемещении $\psi^{i,j}$ единиц i-го вещества вдоль пути $\Pi^{i,j}$. Имеем:

$$\sum_{e\in E} c(e)\rho(e) \geqslant \sum_{e\in E}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}\varphi_i^{i,j}(e)\Big)\rho(e) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}\sum_{e\in E}\varphi_i^{i,j}(e)\rho(e) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}\psi^{i,j}\sum_{e\in\Pi^{i,j}}\rho(e) \geqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}\psi^{i,j}\rho_i = \sum_{i=1}^{n}\rho_i\sum_{j=1}^{k_i}\psi^{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\rho_i\psi_i.$$

Достаточность. Пусть $\psi' = (\psi'_1,\dots,\psi'_n)$ — вектор, удовлетворяющий системе неравенств (8). Покажем, что $\psi'\in\Psi$. Вместо сети S будем рассматривать сеть S', полученную следующим образом: добавим к S вершины $w_1,\dots,w_n$ и рёбра $e_1,\dots,e_n$. Ребром e_i соединим вершину v_i^+ с вершиной w_i; назначим ребру e_i пропускную способность ψ'_i; вершину w_i назначим i-м стоком сети S'.

Покажем, что сеть S' удовлетворяет неравенствам (8). Действительно, для произвольной метрической сети (S',ρ) имеем:

$$\sum_{i=1}^{n}\psi'_i\rho(v_i^-,w_i) = \sum_{i=1}^{n}\psi'_i(\rho(v_i^-,v_i^+)+\rho(v_i^+,w_i)) = \sum_{i=1}^{n}\psi'_i\rho_i + \sum_{i=1}^{n}\psi'_i\rho(e_i) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{e\in E}c(e)\rho(e) + \sum_{i=1}^{n}c(e_i)\rho(e_i) = \sum_{e\in E\cup\{e_1,\dots,e_n\}} c(e)\rho(e).$$

Очевидно, что если вектор ψ' допустим для сети S', то он допустим для S. Таким образом, достаточно доказать импликацию (8) $\Rightarrow \psi'\in\Psi$ для сети S'. В дальнейшем доказательстве будем обозначать через S сеть S' и все стандартные обозначения $(v_i^-, v_i^+, E, V, \Psi,\dots)$ будем относить к сети S'.

Пусть P_i — множество всевозможных путей без самопересечений, ведущих из вершины v_i^- в вершину v_i^+ $(i = 1,\dots,n)$. Положим $P = P_1\cup\dots\cup P_n$, $p = |P|$, $q = |E|$. Занумеруем пути из множества P числами от 1 до p, а рёбра из E — числами от 1 до q. Пусть $A = (a_{i,j})$ — матрица размера $p\times q$, в которой $a_{i,j} = 1$, если i-е ребро принадлежит j-му пути, и $a_{i,j} = 0$ в противном случае. Далее, пусть c — вектор длины q, в котором c_i есть пропускная способность i-го ребра; b — вектор длины p, состоящий из единиц; x, y — неизвестные вектора длин, соответственно, p и q.

Рассмотрим двойственные задачи (6) и (7). Каждый поток φ будем рассматривать как сумму элементарных подпотоков (4). С каждым элементарным потоком однозначно связан путь из множества P. Мощностью элементарного потока будем называть единственную ненулевую координату его величины. Придадим переменной x_i следующий смысл: x_i есть мощность элементарного потока вдоль i-го пути из множества P. Тогда неравенства из задачи (6) имеют следующий смысл: для любого ребра e сумма мощностей элементарных потоков, проходящих через e, не превосходит $c(e)$, и мощности элементарных потоков неотрицательны. Таким образом, вектор x допустим в задаче (6) тогда и только тогда, когда сумма элементарных потоков с соответствующими мощностями x_i есть поток в сети S. Итак, каждой допустимой точке x задачи (6) соответствует поток φ^x в сети S с величиной ψ^x. Условие максимизации задачи (6) означает: сумма координат величины потока φ^x, т. е. сумма $\sum_i \psi_i^x$ максимальна.

Рассмотрим теперь задачу (7). Переменной y_j придадим смысл: y_j есть длина j-го ребра. Каждый набор y порождает свою метрическую сеть $S^y = (S, \rho^y)$. Неравенства задачи (7) при этом приобретают смысл: длины рёбер неотрицательны и длина любого пути в метрической сети S_y, соединяющего i-й источник с i-м стоком $(i = 1, \dots, n)$, не меньше единицы. Условие минимизации задачи (7) означает минимизацию суммы $\sum_{e \in E} c(e)\rho^y(e)$.

Заметим, что по построению сети S', $\psi_i^x \leqslant \psi'_i$ для любых x, i. Кроме того, для метрической сети S_y выполнено (8). Поэтому для любых допустимых решений x, y задач (6), (7) выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i^x \leqslant \sum_{i=1}^{n} \psi'_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \psi'_i \rho_i^y \leqslant \sum_{e \in E} c(e)\rho^y(e). \tag{9}$$

В цепочке неравенств (9) слева стоит величина, максимизируемая в задаче (6), а справа — величина, минимизируемая в (7). В силу принципа двойственности, для некоторых x^0, y^0 левая величина в (9) совпадёт с правой, а значит, все величины в (9) совпадут между собой. В частности, $\sum_i \psi_i^{x^0} = \sum_i \psi'_i$. Отсюда и из неравенств $\psi_i^{x^0} \leqslant \psi'_i$ $(i = 1, \dots, n)$ следует, что $\psi_i^{x^0} = \psi'_i$ для любого i, т. е. $\psi^{x^0} = \psi'$, а значит, $\psi' \in \Psi$.

Теорема 3 доказана.

Заметим, что (2) является частным случаем неравенства (8), для получения которого достаточно положить $\rho(e) = 1$ при $e \in E'$ и $\rho(e) = 0$ в противном случае. Для $n > 2$ представляет интерес следующая задача: выделить из системы (8) конечное число базисных неравенств, наподобие системы (2).

8. Контрпримеры. Пусть $n = 3$. Рассмотрим следующую сеть S: её вершинами являются только полюса, множество рёбер равно $\{(v_1^-, v_2^-),\ (v_1^-, v_2^+),\ (v_2^-, v_3^-),\ (v_2^-, v_3^+),\ (v_2^+, v_3^-),\ (v_2^+, v_3^+),\ (v_3^-, v_1^+),\ (v_3^+, v_1^+)\}$; пропускные способности всех рёбер равны 1.

Пусть $\psi = (2,1,1)$. Несложно проверить, что все естественные ограничения выполнены, т. е. $\psi \in \Psi_0$. Рассмотрим метрическую сеть $\bar{S}$, положив в сети S длины всех рёбер равными 1, и применим теорему 3. Правая часть неравенства (8) равна числу рёбер, т. е. 8, левая часть равна $2\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 2\cdot 3 + 2 + 2 = 10$. Неравенство (8) не выполнено, следовательно, $\varphi \notin \Phi$.

Пусть теперь $n = 2$. Рассмотрим следующую ориентированную сеть S'. Множество вершин, помимо полюсов, содержит вершины w_1, w_2, множество рёбер равно $\{(v_1^-, w_2),\ (v_1^-, v_2^-),\ (v_2^-, w_1),\ (w_1, w_2),\ (w_2, v_2^+),\ (w_1, v_1^+),\ (v_2^+, v_1^+)\}$; пропускные способности рёбер равны 1. Рассмотрим $\psi' = (1,1)$. Несложно проверить, что выполнены следующие аналоги естественных ограничений (для произвольного множества рёбер E' и любого $I \subseteq \{1,2\}$): если для каждого $i \in I$ каждый ориентированный путь, ведущий из i-го источника в i-й сток пересекается с множеством E', то справедливо неравенство (2).

В то же время в S' не существует ориентированного потока величины ψ'. Действительно, ориентированный путь из v_2^- в v_2^+ единственен: v_2^-, w_1, w_2, v_2^+, поэтому он должен быть полностью загружен 2-м веществом, но тогда на любом пути из v_1^- в v_1^+ встретится нагруженное ребро, т. е. невозможно перевести никакой доли первого вещества.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Президента РФ поддержки научных школ (проект НШ–1807.2003.01) и при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 02–01–00985).

Литература

1. Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р. Потоки в сетях. — М.: Мир, 1966.

2. Линейное программирование // Мат. энциклопедия. — Т. 3. — М., 1982. — С. 353–355.

мех.-мат. факультет МГУ, Воробьвы горы, Москва, 119992, Россия
E-mail address: cherukhin@rambler.ru