Аналог теоремы Форда-Фалкерсона для двумерных потоков

Черухин Д. Ю. (Москва)

Известная теорема Форда-Фалкерсона [1] гласит, что максимальная величина потока в сети равна мощности минимального разреза; это верно для сетей, содержащих как ориентированные, так и неориентированные рёбра; верно также в случае нескольких входов и выходов, если поток с любого входа может направляться, разветвляясь, на все выходы. Если же имеется ограничение относительно того, на какие выходы может направляться поток с каждого конкретного входа, что эквивалентно многопродуктовым [2] потокам (мы их будем называть *многомерными*), то уже в двумерном случае аналогичная теорема перестаёт быть выполненной. Однако, если мы рассмотрим сеть только с неориентированными рёбрами, аналог теоремы Форда-Фалкерсона справедлив, как мы покажем, и для двумерных потоков (для трёхмерных потоков даже в случае неориентированной сети аналогичная теорема неверна).

Пусть Γ — конечный неориентированный граф с множеством вершин V и множеством рёбер E. Далее, пусть n — натуральное число и $W = (v_1^-, \ldots, v_n^-,\ v_1^+, \ldots, v_n^+)$ — набор различных вершин из V; вершина v_i^- $(i = 1, \ldots, n)$ называется *i-м источником*, а вершина v_i^+ — *i-м стоком*; источники и стоки называются *полюсами*. Наконец, пусть c: $E \to \mathbb{R}_+$ — функция, сопоставляющая каждому ребру e графа Γ неотрицательное число $c(e)$ — его *пропускную способность*. Тогда набор (Γ, W, c) называется *n-транспортной сетью.*

Пусть $S = (\Gamma, W, c)$ — n-транспортная сеть. Будем считать, что граф Γ не содержит кратных рёбер, что не сужает поставленной задачи, поскольку группу кратных рёбер можно заменить одним ребром, просуммировав их пропускные способности. Вектор-функцию $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, где φ_i: $V^2 \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$, назовём (*n-мерным*) *потоком* в сети S, если выполнены следующие условия (в которых v, w — произвольные вершины из V, $i = 1, \ldots, n$):

а) если v и w не соединены ребром, то $\varphi_i(v, w) = 0$;

б) $\varphi_i(v, w) = -\varphi_i(w, v)$;

в) если $v \neq v_i^+$ и $v \neq v_i^-$, то $\sum\limits_{v' \in V} \varphi_i(v, v') = 0$;

г) $\sum\limits_{v' \in V} \varphi_i(v_i^-, v') \geqslant 0$;

д) для любого ребра $e \in E$ с концами v и w выполнено $\sum\limits_{j=1}^{n} |\varphi_j(v, w)| \leqslant c(e)$.

Вектор $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$, где

$$\psi_i = \sum_{v' \in V} \varphi_i(v_i^-, v'), \quad i = 1, \ldots, n,$$

называется *величиной* потока φ. Вектор ψ, являющийся величиной некоторого потока в данной сети S, называется *допустимым для* S. Число $\varphi_i(v, w)$ интерпретируется как количество i-го продукта, перемещённого по ребру, ведущему из вершины v в вершину w.

Пусть $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $E' \subseteq E$. Скажем, что множество рёбер E' является *I-сечением* сети S, если для любого $i \in I$ любой путь, соединяющий вершину v_i^- с вершиной v_i^+, пересекается с множеством E'. Если ребро e имеет концами вершины v и w, то обозначим $\varphi_i(e) = |\varphi_i(v, w)|$.

Утверждение 1. i) $\forall i\ \psi_i \geqslant 0$;

ii) для любого I-сечения E' выполнено

$$\sum_{i \in I} \psi_i \leqslant \sum_{e \in E'} c(e). \tag{1}$$

Ограничения на допустимый вектор в данной сети, содержащиеся в утверждении 1, назовём *естественными*. Теорему Форда-Фалкерсона можно переформулировать следующим образом.

Теорема 1. [1] Если $n = 1$, то вектор ψ допустим в данной сети тогда и только тогда, когда он удовлетворяет всем естественным ограничениям.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если $n = 2$, то вектор ψ допустим в данной сети тогда и только тогда, когда он удовлетворяет всем естественным ограничениям.

Доказательство (в части, обратной к утверждению 1) проводится по следующей схеме: если теорема неверна, то найдётся максимальный допустимый вектор ψ (т. е. такой, что при увеличении хотя бы одной координаты он перестаёт быть допустимым), на котором ни одно из неравенств (1) не обращается в равенство. Рассмотрим поток мощности ψ и будем проводить с ним следующие преобразования (*): выбирается некоторый контур, и одна координата потока (либо обе одновременно) изменяется вдоль этого контура на одну и ту же величину; при изменении обеих координат возможно увеличение одной и уменьшение другой. При этом будем следить, чтобы поток оставался потоком; величина его, очевидно, не изменяется.

Целью наших преобразований является получение такого потока Π^*, что найдётся сечение, через которое продукт каждого типа проходит в своём строго определённом направлении. Это и будет означать, что одно из неравенств (1) обращается в равенство, и, тем самым, мы получим противоречие.

В процессе преобразований будем наблюдать за количеством нагруженных рёбер (т. е. таких, для которых неравенство в п. д) определения потока обращается в равенство) и 1-нагруженных рёбер (таких нагруженных, в потоке на которых ровно одна координата отлична от нуля). Можно показать, что если ψ — максимальный допустимый вектор, поток приведён (не существует контуров, вдоль которых некоторая координата потока положительна) и не имеет вида Π^*, то существует преобразование (*), уменьшающее число нагруженных или 1-нагруженных рёбер. Тем самым, за конечное число операций (*) поток Π^* будет построен.

Заметим, что для многомерной задачи можно дать достаточно общий критерий существования потока данной величины, опирающийся на принцип двойственности линейного программирования.

Пусть S — сеть и ρ: $E \to \mathbb{R}_+$ — функция, сопоставляющая каждому ребру e его *длину* $\rho(e)$. Тогда набор $\bar{S} = (S, \rho)$ назовём *метрической сетью.* Длиной пути Π в метрической сети назовём сумму длин рёбер, входящих в этот путь с учётом кратности вхождений; расстоянием между вершинами v, v' назовём минимальную из длин путей, соединяющих v и v', обозначим её $\rho(v, v')$; если вершины v, v' не соединены путём, положим $\rho(v, v') = +\infty$. Обозначим $\rho_i = \rho(v_i^-, v_i^+)$.

Теорема 3. Вектор ψ допустим для сети S тогда и только тогда, когда для любой метрической сети $\bar{S} = (S, \rho)$ выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i \rho_i \leqslant \sum_{e \in E} c(e) \rho(e). \tag{2}$$

Заметим, что (1) является частным случаем неравенства (2), для получения которого достаточно положить $\rho(e) = 1$ при $e \in E'$ и $\rho(e) = 0$ в противном случае. В случае $n > 2$ представляет интерес следующая задача: выделить из системы (2) конечное множество базисных неравенств, подобное системе (1).

В заключение приведём контрпримеры, показывающие, что для двумерной задачи при наличии ориентированных рёбер и для трёхмерной в случае неориентированной сети теорема, аналогичная теоремам 1, 2, неверна.

При $n = 2$ рассмотрим следующую ориентированную сеть S'. Множество вершин, помимо полюсов, содержит вершины w_1, w_2, множество рёбер равно $\{(v_1^-, w_2)$, (v_1^-, v_2^-), (v_2^-, w_1), (w_1, w_2), (w_2, v_2^+), (w_1, v_1^+), $(v_2^+, v_1^+)\}$; пропускные способности рёбер равны 1. Рассмотрим $\psi' = (1, 1)$. Несложно проверить, что выполнены следующие аналоги естественных ограничений (для произвольного множества рёбер E' и любого $I \subseteq \{1, 2\}$): если для каждого $i \in I$ каждый ориентированный путь, ведущий из i-го источника в i-й сток пересекается с множеством E', то справедливо неравенство (1).

В то же время в S' не существует ориентированного потока величины ψ'. Действительно, ориентированный путь из v_2^- в v_2^+ единственен: v_2^-, w_1, w_2, v_2^+, поэтому он должен быть полностью загружен 2-м продуктом, но тогда на любом пути из v_1^- в v_1^+ встретится нагруженное ребро, т. е. невозможно перевести никакой доли первого продукта.

Для $n = 3$ рассмотрим следующую сеть S: её вершинами являются только полюса, множество рёбер равно $\{(v_1^-, v_2^-)$, (v_1^-, v_2^+), (v_2^-, v_3^-), (v_2^-, v_3^+), (v_2^+, v_3^-), (v_2^+, v_3^+), (v_3^-, v_1^+), $(v_3^+, v_1^+)\}$; пропускные способности всех рёбер равны 1.

Пусть $\psi = (2, 1, 1)$. Несложно проверить, что все естественные ограничения выполнены. Рассмотрим метрическую сеть $\bar{S}$, положив в сети S длины всех рёбер равными 1, и применим теорему 3. Правая часть неравенства (2) равна числу рёбер, т. е. 8, левая часть равна $2\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 2 \cdot 3 + 2 + 2 = 10$. Неравенство (2) не выполнено, следовательно, вектор ψ не допустим.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Президента РФ поддержки научных школ (проект НШ–1807.2003.01) и при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 02–01–00985).

Литература

1. Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р. Потоки в сетях. — М.: Мир, 1966.
2. Поток в сети // Мат. энциклопедия. — Т. 4. — М., 1984. — С. 539.