УДК 519.714

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ, БЕСПОВТОРНО ВЫРАЗИМЫХ ФОРМУЛАМИ

Д. Ю. Черухин

В работе показано, что мощность множества инвариантных классов функций 2-значной логики, бесповторно выразимых формулами в фиксированном полном конечном базисе, счётна; доказана возможность описания этих классов с помощью запрещённых подфункций и контекстно-свободных грамматик. Для каждого $k > 2$ приведён пример конечного базиса в k-значной логике, для которого мощность множества таких классов равна континууму.

Понятие инвариантного класса булевых функций было введено С. В. Яблонским в работе [1]. Он же показал, что мощность множества таких классов равна континууму. Мы ограничимся только теми классами, в которых все функции бесповторно выразимы формулами в фиксированном конечном базисе (бесповторная выразимость рассматривалась А. В. Кузнецовым в работе [2]). Другими словами, это те классы, которые содержат конечное число неразложимых функций. Целью настоящей статьи является доказательство следующих утверждений.

Теорема 1. *Для любого полного конечного булева базиса B мощность множества инвариантных классов, состоящих из функций, бесповторно выразимых формулами над B, счётна.*

Теорема 2. *Для любого $k > 2$ существует конечный базис B_k функций k-значной логики такой, что мощность множества инвариантных классов, состоящих из функций, бесповторно выразимых формулами над B_k, равна континууму.*

Кроме того, мы покажем, что каждый инвариантный класс, состоящий из функций, бесповторно выразимых в конечном булевом базисе B, может быть порождён (в определённом смысле) конечным числом запрещённых подфункций и задан множеством формул, выводимых в контекстно-свободной грамматике специального вида.

1. Функции k-значной логики

Функцией *k-значной логики* называется функция $f\colon \{0,\dots,k-1\}^n \to \{0,\dots,k-1\}$. Множество всех функций k-значной логики обозначим через P_k. Подмножество $K \subseteq P_k$ называется *инвариантным* классом, если K замкнуто относительно операций добавления и изъятия несущественных переменных, перестановки переменных и подстановки констант вместо переменных.

Пусть $B \subseteq P_k$ — конечное множество функций (*базис*). *Формулой* над B называется выражение вида c, где c — константа из B, или $f(F_1,\dots,F_n)$, где f — n-местная функция из B, $n \geqslant 1$, а каждое из выражений $F_1,\dots,F_n$ является или формулой над B, или *переменной* из множества $\{x_1,x_2,\dots\}$ (определение формулы индуктивно). Для удобства переменные также будем считать формулами. Формула F, реализующая функцию f, называется *бесповторной*, если каждая существенная переменная функции f входит в F ровно один раз. Функция f *бесповторно выразима* над B, если f выразима некоторой бесповторной формулой над B. Обозначим через $\mathcal{E}(B)$ множество всех функций, бесповторно выразимых в базисе B. Так как множество $\mathcal{E}(B)$ является подмножеством множества $\mathcal{E}(B^*)$ для некоторого полного базиса B^*, то из теоремы 1 следует, что для любой конечной системы $B \subseteq P_2$ мощность множества инвариантных классов в $\mathcal{E}(B)$ не более чем счётна. Из теоремы 2, напротив, следует, что при $k > 2$ существует полный базис $B^* \subseteq P_k$, в котором мощность множества инвариантных классов равна континууму (очевидно, эта мощность не больше континуума).

Рассмотрим *булевы* функции, т. е. функции 2-значной логики. Скажем, что функция $f(x_1,\dots,x_n)$ *возрастает* (*убывает*) *по i-ой переменной*, $1 \leqslant i \leqslant n$, если для любых двоичных констант $c_1,\dots,c_{i-1},c_{i+1},\dots,c_n$ число $f(c_1,\dots,c_{i-1},0,c_{i+1},\dots,c_n)$ не больше (не меньше) числа $f(c_1,\dots,c_{i-1},1,c_{i+1},\dots,c_n)$. Каждую функцию $f(x_1,\dots,x_n)$, существенно зависящую от всех своих переменных, можно представить в виде $f'(\varphi_1(x_1),\dots,\varphi_n(x_n))$, где $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ — перестановки и f' — функция, не убывающая ни по одной переменной (нужно взять $\varphi_i(x) = \bar{x}$ для тех и только тех i, для которых функция f убывает по x_i). Функцию f' назовём *неубывающим представителем* функции f. Функция f' обладает следующим свойством: для каждого i найдутся такие константы $c_1,\dots,c_{i-1},c_{i+1},\dots,c_n$, что

$$f'(c_1,\dots,c_{i-1},x_i,c_{i+1},\dots,c_n) \equiv x_i. \qquad (1)$$

Тождество (1) является исключительным свойством 2-значной логики, приводящим, как мы увидим, к различию результатов теорем 1 и 2.

Функция h называется *подфункцией* функции f, если h может быть получена из f подстановкой констант вместо некоторых переменных. При этом переменная, вместо которой подставлена константа, удаляется из списка переменных с сохранением порядка следования оставшихся переменных. Рассмотрим произвольный булев базис B. Обозначим через $[B]$ базис, состоящий из всех функций h таких, что h существенно зависит от всех своих переменных и является подфункцией некоторой функции из базиса B. Пусть g — произвольная функция, бесповторно выразимая в базисе B и не равная тождественно константе. Представим g в виде бесповторной формулы F над B. Формулу F преобразуем в формулу F_1 над $[B]$, такую, что F_1 тождественно равна формуле F, в F_1 отсутствуют константы и все переменные формулы F_1 существенны. Для этого несущественные переменные формулы F заменим константами, а затем исключим из полученной формулы константы и несущественные переменные базисных функций, заменив базисные функции их подфункциями из $[B]$. Далее, обозначим через B' множество всех таких функций f' от двух или большего числа переменных, что f' является неубывающим представителем некоторой функции из $[B]$ или отрицания некоторой функции из $[B]$. Формулу F_1 преобразуем в формулу F' над множеством $B' \cup \{\neg\}$, такую, что F' тождественно равна формуле F и отрицания в F' могут быть только над переменными. Такое преобразование можно осуществить последовательно, начиная от внешней функции формулы и двигаясь от формулы к её подформулам.

Таким образом, полученная формула F' над множеством функций $B' \cup \{\neg\}$ бесповторно реализует функцию g, не содержит констант и фиктивных переменных и каждое отрицание в F' находится непосредственно над переменной. Всякую формулу, удовлетворяющую этим свойствам, обозначим через $F_B(g)$. Введём вспомогательное множество переменных $\{y^0, y^1\}$. Обозначим через $F'_B(g)$ формулу, полученную из $F_B(g)$ заменой каждой переменной без отрицания на переменную y^1, и каждой переменной с отрицанием на переменную y^0. Формула $F'_B(g)$ характеризует функцию g с точностью до перестановки переменных, добавления и изъятия несущественных переменных.

2. Частично-упорядоченные множества

Рассмотрим частично-упорядоченные множества (ЧУМ) с нестрогим отношением частичного порядка $\leqslant$ и соответствующим строгим отношением $<$, которые будем иногда называть *предшествованием* и *строгим предшествованием* соответственно. *Бесконечно возрастающей (убывающей) цепью* в ЧУМ M называется такая бесконечная последовательность $m_1, m_2, \ldots$ элементов из M, что выполнены неравенства $m_1 < m_2 < \ldots$ $(m_1 > m_2 > \ldots)$. ЧУМ M назовём *коротким*, если в нём отсутствуют бесконечно убывающие цепи и *узким*, если в нём отсутствуют бесконечные множества попарно несравнимых элементов. Элемент $m \in M$ называется *минимальным*, если в M нет элемента

m' такого, что $m' < m$. Два различных минимальных элемента несравнимы. Множество всех минимальных элементов в M обозначим через $\min M$.

Утверждение 1. *Если* ЧУМ *M является коротким, то для любого $m_1 \in M$ существует элемент $m \in \min M$, предшествующий элементу m_1.*

Доказательство. Пусть, напротив, ни один элемент из $\min M$ не предшествует элементу m_1. Так как $m_1 \leqslant m_1$, то $m_1 \notin \min M$. Поэтому существует элемент $m_2 \in M$ такой, что $m_2 < m_1$. Для m_2 также не найдётся предшествующего ему минимального элемента (в противном случае этот минимальный элемент предшествовал бы и элементу m_1). Поэтому найдётся элемент $m_3 \in M$, такой, что $m_3 < m_2$. Действуя так далее, получим бесконечно убывающую цепь элементов $m_1 > m_2 > \ldots$ Противоречие. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *В любом коротком узком бесконечном* ЧУМ *существует бесконечно возрастающая цепь.*

Доказательство. Пусть M — короткое узкое бесконечное ЧУМ. Так как M короткое, то в силу утверждения 1, любой элемент $m \in M$ предшествует некоторому минимальному элементу. Поэтому множество $\min M$ непусто. Последнее состоит из попарно несравнимых элементов. Поэтому в силу узости множества M, множество $\min M$ конечно. Обозначим через m_1 тот минимальный элемент, который предшествует бесконечному числу элементов из M. Пусть M_1 — множество всех элементов, которым предшествует m_1. Применив то же рассуждение к множеству M_1, выберем в нём элемент m_2 и бесконечное подмножество M_2, состоящее из элементов, которым предшествует m_2. Действуя так далее, получим бесконечно возрастающую цепь $m_1 < m_2 < \ldots$ Утверждение 2 доказано.

Подмножество $K \subseteq M$ назовём *инвариантным* классом, если вместе с каждым своим элементом K содержит все предшествующие ему элементы. Класс K можно рассматривать как ЧУМ с отношением порядка, унаследованным из M. Множество всех инвариантных классов в M обозначим через $I(M)$. Множество $I(M)$ также можно рассматривать как ЧУМ с отношением теоретико-множественного вложения классов. Пусть $P \subseteq M$ и $Q \subseteq M$. Обозначим через $Z(P;Q)$ множество всех элементов из P, не предшествующих ни одному элементу из Q. Если P — инвариантный класс (в частности, $P = M$), то множество $Z(P;Q)$ является инвариантным классом и называется классом, *порождённым* (в P) множеством *запретов* Q.

Лемма 1. *Пусть M — не более чем счётное короткое* ЧУМ. *Тогда следующие условия равносильны:*

а) *множество M узко*;

b) *число инвариантных классов в* M *не более чем счётно*;

c) *каждый инвариантный класс может быть порождён конечным множеством запретов.*

Доказательство. Импликация c) $\Rightarrow$ b) следует из того, что число всевозможных конечных подмножеств множества M не более чем счётно. Докажем, что из отрицания a) следует отрицание b), т. е. докажем импликацию b) $\Rightarrow$ a).

Пусть множество M неузко. Тогда в M существует бесконечное подмножество P попарно несравнимых элементов. Рассмотрим произвольное подмножество $Q \subseteq P$ и рассмотрим инвариантный класс $\langle Q \rangle = \{m \in M \mid \exists q \in Q \ m \leqslant q\}$. Если $Q_1 \subseteq P$, $Q_2 \subseteq P$ и $Q_1 \neq Q_2$, то $\langle Q_1 \rangle \neq \langle Q_2 \rangle$. Действительно, существует либо $q \in Q_1 \backslash Q_2$, либо $q \in Q_2 \backslash Q_1$. В первом случае элемент q несравним со всеми элементами из Q_2, поэтому q не предшествует ни одному из них, а значит $q \notin \langle Q_2 \rangle$, в то же время $q \in \langle Q_1 \rangle$; второй случай аналогичен. Таким образом, имеем континуум инвариантных классов $\langle Q \rangle$, $Q \subseteq P$, т. е. b) не выполнено.

Наконец докажем, что из отрицания c) следует отрицание a), т. е. докажем импликацию a) $\Rightarrow$ c). Пусть существует инвариантный класс K, который нельзя породить конечным множеством запретов. Пусть $P = M \backslash K$. В силу инвариантности K имеем $K = Z(M; P)$. Покажем, что $K = Z(M; \min P)$. Действительно, $K = Z(M; P) \subseteq Z(M; \min P)$. С другой стороны, если $m \in Z(M; \min P)$, то ни для одного $p \in \min P$ не выполнено $p \leqslant m$. Поэтому в P нет элемента q такого, что $q \leqslant m$ (в противном случае, если существует $q \in P$, $q \leqslant m$, то по утверждению 1 существует $p \in \min P$, $p \leqslant q$, а тогда $p \leqslant m$; противоречие). Следовательно, $m \in Z(M; P) = K$. Элементы множества $\min P$ попарно несравнимы, в то же время класс K не может быть порождён конечным множеством запретов. Поэтому $\min P$ — бесконечное множество, а значит, M не узко. Лемма 1 доказана.

Объединением непересекающихся ЧУМ M_1 и M_2 называется их теоретико-множественное объединение $M_1 \cup M_2$ с отношением частичного порядка, унаследованным от множеств M_1 и M_2; при этом элементы $m_1 \in M_1$ и $m_2 \in M_2$ считаются несравнимыми. *Произведением* ЧУМ M_1 и M_2 называется их декартово произведение $M_1 \times M_2$ с покоординатным отношением частичного порядка $((m_1, m_2) \leqslant (m_1', m_2') \iff m_1 \leqslant m_1'$ и $m_2 \leqslant m_2')$.

Лемма 2. *Пусть* M_1 *и* M_2 *— узкие короткие* ЧУМ. *Тогда множества* $M_1 \cup M_2$ *и* $M_1 \times M_2$ *узки и коротки.*

Доказательство. Вначале рассмотрим объединение множеств $M = M_1 \cup M_2$. Из любой бесконечно убывающей цепи $m_1 > m_2 > \ldots$ в M можно выбрать бесконечно убывающую подцепь, состоящую только из элементов множества M_1 или только из элементов M_2. Аналогично, из бесконечного множества

$\{m_1, m_2, \dots\}$ попарно несравнимых элементов в M можно выбрать бесконечное подмножество, состоящее только из элементов M_1 или только из элементов M_2. Поэтому, если множества M_1 и M_2 являются узкими (короткими), то множество M является узким (коротким).

Теперь рассмотрим множество $M' = M_1 \times M_2$. Пусть M' не является коротким. Тогда в M' существует бесконечно убывающая последовательность пар $(m_1^1, m_1^2) > (m_2^1, m_2^2) > \dots$ Рассмотрим множества $Q_i = \{m_j^i \mid j = 1, 2, \dots\}$, $i = 1, 2$. Хотя бы одно из них бесконечно в силу того, что пары (m_j^1, m_j^2), $j = 1, 2, \dots$ попарно различны. Пусть, например, Q_1 бесконечно. Тогда из множества Q_1 можно выбрать бесконечно убывающую цепь в M_1, т. е. множество M_1 является коротким, что противоречит условию леммы.

Пусть теперь M' не узко. Тогда в нём найдётся бесконечное множество несравнимых пар $\{m'_j = (m_j^3, m_j^4) \mid j = 1, 2, \dots\}$. Рассмотрим множество $Q_3 = \{m_j^3 \mid j = 1, 2, \dots\}$. Если оно конечно, то начиная с некоторого N имеем $m_N^3 = m_{N+1}^3 = \dots$ Поэтому множество $\{m_j^4 \mid j \geqslant N\} \subseteq M_2$ является примером бесконечного множества, состоящего из попарно несравнимых элементов, чего быть не может. Следовательно, Q_3 бесконечно. Тогда по утверждению 2 из Q_3 можно выбрать бесконечно возрастающую цепь $m_{i(1)}^3 < m_{i(2)}^3 < \dots$ (множество Q_3 является узким и коротким как подмножество множества M_1). Рассмотрим множество элементов $Q_4 = \{m_{i(1)}^4, m_{i(2)}^4, \dots\}$ (парных к элементам выбранной бесконечно возрастающей цепи). Если Q_4 конечно, то для некоторого N' имеем $m_{i(N')}^4 = m_{i(N'+1)}^4$. Следовательно, $m'_{i(N')} < m'_{i(N'+1)}$, что противоречит несравнимости этих пар. Остаётся рассмотреть случай, когда Q_4 бесконечно. В этом случае по утверждению 2 из Q_4 можно выбрать бесконечно возрастающую последовательность $m_{i(j(1))}^4 < m_{i(j(2))}^4 < \dots$ Числа $j(1), j(2), \dots$ попарно различны. Следовательно, найдётся такое N'', что $j(N'') < j(N''+1)$. Поэтому $m'_{i(j(N''))} < m'_{i(j(N''+1))}$, что противоречит несравнимости этих пар. Лемма 2 доказана.

Утверждение 3. *Если M является узким и коротким* ЧУМ, *то множество $I(M)$ коротко.*

Доказательство. Пусть, напротив, в M существует бесконечно убывающая последовательность инвариантных классов $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ Тогда существует последовательность элементов $m_1 \in K_1 \backslash K_2$, $m_2 \in K_2 \backslash K_3, \dots$ Ни для каких $i < j$ не выполнено неравенство $m_i \leqslant m_j$, иначе $m_i \in K_j$, что противоречит включению $m_i \in K_i \backslash K_{i+1} \subseteq K_i \backslash K_j$. Множество $Q = \{m_1, m_2, \dots\}$ бесконечно; оно коротко и узко как подмножество множества M. Согласно утверждению 2 в Q существует бесконечно возрастающая цепь $m_{i(1)} < m_{i(2)} < \dots$ Числа $i(1), i(2), \dots$ попарно различны. Поэтому найдётся N такое, что $i(N) < i(N +$

1). Тогда $m_{i(N)} < mi(N+1)$, что противоречит выбору элементов $m_1, m_2, \ldots$ Утверждение 3 доказано.

3. Формулы над сигнатурами

Зафиксируем целое неотрицательное число n. Пусть $M_0, \ldots, M_n$ — короткие, не более чем счётные ЧУМ. Набор $\Sigma = (M_0, \ldots, M_n)$ назовём *сигнатурой*. Индуктивно определим *формулы над сигнатурой* Σ. Формулами являются выражения, имеющие вид m_0, где $m_0 \in M_0$, или $m_s(F_1, \ldots, F_s)$, где $m_s \in M_s$, $1 \leqslant s \leqslant n$ и каждое из выражений $F_1, \ldots, F_s$ является ранее построенной формулой над Σ. Примером сигнатуры является набор $\Sigma_0(B) = (B(0) \cup \{x_1, x_2, \ldots\}, B(1), \ldots, B(n))$, где $B(i)$ — множество всех i-местных функций из базиса B (все функции и переменные попарно несравнимы, n равно наибольшему числу переменных у функций из B). Формулами над $\Sigma_0(B)$ являются формулы в базисе B. Другим примером является сигнатура $\Sigma(B) = (\{y^0, y^1\}, \varnothing, B'(2), \ldots, B'(n))$, формулами над которой являются формулы вида $F'_B(g)$. Сигнатуру $(M_0, \ldots, M_n)$ назовём *узкой*, если множества $M_0, \ldots, M_n$ узки. Сигнатура $\Sigma(B)$ является узкой, а $\Sigma_0(B)$ не является.

Пусть F — формула над Σ. *Подформулой* формулы F называется произвольная формула (включая F), возникшая в процессе индуктивного построения формулы F по определению. Введём понятие *предшествования* формул. Для этого определим элементарные операции *горизонтального* и *вертикального сжатия* формулы. Пусть F — формула над Σ, G — её подформула и G имеет вид $m_s(G_1, \ldots, G_s)$, где $m_s \in M_s$, $G_1, \ldots, G_s$ — формулы. Обозначим через $F_{G \to G_i}$ формулу, полученную из F заменой подформулы G (точнее, её рассматриваемого экземпляра) на формулу G_i, $1 \leqslant i \leqslant s$. Переход от F к $F_{G \to G_i}$ назовём элементарной операцией горизонтального сжатия формулы. Элементарной операцией вертикального сжатия назовём замену в формуле одного вхождения символа $m_s \in M_s$, $0 \leqslant s \leqslant n$ (являющегося началом подформулы с s аргументами) на символ $m'_s \in M_s$ такой, что $m'_s < m_s$. Скажем, что формула H предшествует формуле F, если H может быть получена из F за конечное (возможно, нулевое) число применений элементарных операций горизонтального и вертикального сжатия. Обозначим через $\mathcal{F}(\Sigma)$ частично-упорядоченное множество формул в сигнатуре Σ с отношением предшествования формул.

Утверждение 4. *Для любой сигнатуры Σ множество $\mathcal{F}(\Sigma)$ коротко и не более чем счётно.*

Доказательство. Не более чем счётность множества $\mathcal{F}(\Sigma)$ следует из того, что формулы являются словами в не более чем счётном алфавите $\{'(', ')', ','\} \cup$

$M_0 \cup \ldots \cup M_n$, а множество всех таких слов не более чем счётно. Докажем короткость множества $\mathcal{F}(\Sigma)$. Действительно, в противном случае существует бесконечная цепь формул $F_1 > F_2 > \ldots$ такая, что F_{i+1} получена из F_i элементарной операцией горизонтального или вертикального сжатия. К любой формуле операцию горизонтального сжатия можно применить лишь конечное число раз, так как длина формулы каждый раз уменьшается. Поэтому начиная с некоторого N в последовательности $F_N, F_{N+1}, \ldots$ применяется только операция вертикального сжатия. Найдётся такое j и такое вхождение в формулу F_N символа из множества M_j, к которому операция вертикального сжатия применяется в последовательности $F_N, F_{N+1}, \ldots$ бесконечное число раз. Следовательно, в множестве M_j существует бесконечно убывающая цепь элементов, что противоречит его короткости, требуемой в определении сигнатуры. Утверждение 4 доказано.

Расширенной сигнатурой назовём пару $\Sigma' = (\Sigma, R)$, где Σ — сигнатура, $R \subseteq \mathcal{F}(\Sigma)$ и $|R| \leqslant 1$, т. е. R либо пусто, либо содержит одну формулу над Σ. Положим $\mathcal{F}(\Sigma') := Z(\mathcal{F}(\Sigma); R)$. Пусть Σ_1 и Σ_2 — сигнатуры, $\Sigma_i = (M_0^i, \ldots, M_n^i)$, $i = 1, 2$. Скажем, что Σ_1 *строго предшествует* сигнатуре Σ_2 ($\Sigma_1 \prec \Sigma_2$), если для некоторого i, $0 \leqslant i \leqslant n$, выполнены равенства $M_n^1 = M_n^2, \ldots, M_{i+1}^1 = M_{i+1}^2$, но $M_i^1 \subset M_i^2$, причём M_i^1 является инвариантным классом в M_i^2. Пусть теперь Σ_1' и Σ_2' — расширенные сигнатуры, $\Sigma_i' = (\Sigma_i, R_i)$, $i = 1, 2$. Скажем, что Σ_1' *строго предшествует* сигнатуре Σ_2' ($\Sigma_1' \prec \Sigma_2'$), если либо $\Sigma_1 \prec \Sigma_2$; либо $\Sigma_1 = \Sigma_2$ и реализуется один из двух случаев: 1) $R_2 = \varnothing$, $R_1 \neq \varnothing$, 2) $R_2 = \{F_2\}$, $R_1 = \{F_1\}$ и F_1 является собственной подформулой формулы F_2 (*собственная* подформула — подформула, отличная от самой формулы). Расширенную сигнатуру назовём *узкой*, если входящая в неё сигнатура узка.

Лемма 3. *Не существует бесконечной последовательности узких расширенных сигнатур $\Sigma_1', \Sigma_2', \ldots$, в которой каждая следующая сигнатура строго предшествует предыдущей (другими словами, класс*[1] *узких расширенных сигнатур короток).*

Доказательство. Пусть, напротив, существует такая последовательность: $\ldots \prec \Sigma_2' \prec \Sigma_1'$, $\Sigma_i' = (\Sigma_i, R_i)$, $\Sigma_i = (M_0^i, \ldots, M_n^i)$, $i = 1, 2, \ldots$ Возможны два случая: 1) в последовательности $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ имеется бесконечное число различных сигнатур; 2) среди $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ число различных сигнатур конечно.

В первом случае обозначим через i наименьшее из чисел $0, \ldots, n$, удовлетворяющее условию: для любого $j > i$ найдётся такое N_j, что $M_j^{N_j} = M_j^{N_j+1} = \ldots$ Если такого числа i нет, то начиная с некоторого N' имеем

[1] В смысле аксиоматики теории множеств Гёделя-Бернайса

$\Sigma_{N'} = \Sigma_{N'+1} = \ldots$, что противоречит условию случая 1). Обозначим через N максимальное из чисел $N_{i+1}, \ldots, N_n, 1$. Тогда последовательность множеств $M_i^N, M_i^{N+1}, \ldots$, с одной стороны, монотонно (нестрого) убывает по включению, а с другой стороны, в силу выбора i, число различных элементов в ней бесконечно. Поэтому в ней существует строго убывающая подпоследовательность $M_i^N = Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots$ Каждое множество Q_i является инвариантным классом в Q_{i-1}, т. е. $Q_1, Q_2, \ldots$ — бесконечно убывающая последовательность инвариантных классов в узком (по условию леммы) и коротком (по определению сигнатуры) множестве M_i^N, чего не может быть согласно утверждению 3.

Во втором случае найдётся номер N, такой, что $\Sigma_N = \Sigma_{N+1} = \ldots$ Рассмотрим последовательность $R_{N+1}, R_{N+2}, \ldots$ (возможно, $R_N = \varnothing$). Каждое множество R_i содержит формулу F_i над Σ_N, причём F_{i+1} является собственной подформулой формулы F_i, $i = N+1, N+2, \ldots$ При переходе от формулы к её подформуле длина формулы уменьшается. Поэтому описанная бесконечная последовательность формул невозможна. Полученное противоречие доказывает лемму 3.

Положим $\Sigma_\varnothing \colon = (\varnothing, \ldots, \varnothing)$, $\Sigma'_\varnothing \colon = (\Sigma_\varnothing, \varnothing)$; сигнатура $\Sigma'_\varnothing$ называется *пустой*.

Утверждение 5 (об индукции по короткому классу). *Пусть P — предикат, заданный на расширенных сигнатурах, для которого выполнены условия*:

a) $P(\Sigma'_\varnothing)$ *истинно*;

b) *если Σ' — непустая узкая расширенная сигнатура и для любой узкой расширенной сигнатуры Σ'_1, строго предшествующей сигнатуре Σ', выражение $P(\Sigma'_1)$ истинно, то $P(\Sigma')$ истинно.*

Тогда для любой узкой расширенной сигнатуры Σ' выражение $P(\Sigma')$ истинно.

Доказательство. Предположим противное, т. е. для некоторой узкой расширенной сигнатуры Σ'_1 выражение $P(\Sigma'_1)$ ложно. Очевидно, что $\Sigma'_1 \neq \Sigma'_\varnothing$. Поэтому согласно отрицанию свойства b) существует такая узкая расширенная сигнатура Σ'_2, строго предшествующая сигнатуре Σ'_1, что выражение $P(\Sigma'_2)$ ложно. Действуя так далее, получим бесконечно убывающую последовательность узких расширенных сигнатур $\ldots \prec \Sigma'_2 \prec \Sigma'_1$, что противоречит лемме 3. Утверждение 5 доказано.

Лемма 4 (основная). *Для любой узкой расширенной сигнатуры Σ' множество $\mathcal{F}(\Sigma')$ узко.*

Доказательство. Проведём индукцию, опираясь на утверждение 5. В качестве предиката P возьмём утверждение об узости множества $\mathcal{F}(\Sigma')$. Так как множество $\mathcal{F}(\Sigma'_{\varnothing})$ пусто, то оно узко. Следовательно, условие а) утверждения 5 выполнено. Проверим условие b). Пусть $\Sigma' = (\Sigma, R)$ — произвольная непустая узкая расширенная сигнатура, $\Sigma = (M_0, \ldots, M_n)$. Рассмотрим два случая: 1) $R = \varnothing$; 2) $R \neq \varnothing$.

Случай 1. Докажем, что множество $I(\mathcal{F}(\Sigma))$ не более чем счётно. Пусть $K \subset \mathcal{F}(\Sigma)$ — произвольный инвариантный класс, отличный от множества $\mathcal{F}(\Sigma)$. Тогда существует формула $F \in \mathcal{F}(\Sigma)$, не принадлежащая K. Имеем $K \subseteq Z(\mathcal{F}(\Sigma); \{F\}) = \mathcal{F}(\Sigma'_F)$, где $\Sigma'_F = (\Sigma, \{F\})$. Очевидно, что K является инвариантным классом в множестве $\mathcal{F}(\Sigma'_F)$. Следовательно,

$$I(\mathcal{F}(\Sigma)) = \{\mathcal{F}(\Sigma)\} \cup \bigcup_{F \in \mathcal{F}(\Sigma)} I(\mathcal{F}(\Sigma'_F)). \qquad (2)$$

По определению, каждая сигнатура Σ'_F строго предшествует сигнатуре Σ', кроме того, Σ'_F узка (в силу узости сигнатуры Σ). По предположению индукции множество $\mathcal{F}(\Sigma'_F)$ узко. Следовательно, по лемме 1 число инвариантных классов в $\mathcal{F}(\Sigma'_F)$ не более чем счётно (короткость и не более чем счётность множества $\mathcal{F}(\Sigma)$, а значит и его подмножества $\mathcal{F}(\Sigma'_F)$, следует из утверждения 4). В силу равенства (2) множество $I(\mathcal{F}(\Sigma))$ не более чем счётно как объединение не более чем счётного числа не более чем счётных множеств. Опять же по лемме 1 множество $\mathcal{F}(\Sigma)$ узко. Случай 1, в силу равенства $\mathcal{F}(\Sigma') = \mathcal{F}(\Sigma)$, рассмотрен.

Случай 2. Пусть $R = \{F\}$. Если формула F имеет вид m_0, $m_0 \in M_0$, то инвариантный класс $\mathcal{F}(\Sigma')$, равный $Z(\mathcal{F}(\Sigma); \{F\})$, состоит из тех и только тех формул над Σ, в которых нет подформул вида m, где $m \in M_0$ и $m \geqslant m_0$. Таким образом, справедливо равенство $\mathcal{F}(\Sigma') = \mathcal{F}(\Sigma'_0)$, где $\Sigma'_0 = (\Sigma_0, \varnothing)$, $\Sigma_0 = (Z(M_0; \{m_0\}), M_1, \ldots, M_n)$. По определению сигнатура Σ'_0 строго предшествует сигнатуре Σ' и узка в силу узости сигнатуры Σ'. Следовательно, по предположению индукции множество $\mathcal{F}(\Sigma'_0)$ узко. Тогда множество $\mathcal{F}(\Sigma')$ узко.

Наконец, рассмотрим случай, когда формула F имеет вид $m_s(F_1, \ldots, F_s)$, где $m_s \in M_s$ и $F_1, \ldots, F_s$ — формулы над Σ. Обозначим через Σ'_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, расширенную сигнатуру $(\Sigma, \{F_i\})$. Так как формула F_i является подформулой формулы F, то сигнатура Σ'_i предшествует сигнатуре Σ'. Кроме того, Σ'_i узка в силу узости сигнатуры Σ. Применив к Σ'_i предположение индукции, получим, что множество $\mathcal{F}(\Sigma'_i)$ узко.

Рассмотрим произвольную формулу G из множества $\Phi(\Sigma')$ и её произвольную подформулу H вида

$$m'(H_1, \ldots, H_s), \text{ где } m' \in M_s \text{ и } H_1, \ldots, H_s \text{ — формулы.} \qquad (3)$$

Множество $\mathcal{F}(\Sigma')$ состоит только из таких формул G над Σ, что для каждой подформулы H вида (3) формулы G либо $m' \ngeqslant m_s$, либо для некоторого i формула H_i не предшествует формуле F_i, т. е. $H_i \in \mathcal{F}(\Sigma'_i)$.

Пусть $K_0 = \{(0, m) \mid m \in M_{s-1}\}$, $K_i = \{(i, m, H'_i) \mid m \in M_s,\ H'_i \in \mathcal{F}(\Sigma'_i)\}$, $1 \leqslant i \leqslant s$ и $M'_s = K_0 \cup K_1 \cup \ldots \cup K_s$. На множестве K_0 введём частичный порядок: $(0, m) \leqslant (0, m'') \iff m \leqslant m''$. При этом K_0 изоморфно множеству M_{s-1}. На K_i при $i > 0$ также введём частичный порядок: $(i, m, H'_i) \leqslant (i, m'', H''_i) \iff m \leqslant m''$ и H'_i предшествует формуле H''_i. ЧУМ K_i изоморфно произведению $M_s \times \mathcal{F}(\Sigma'_i)$. Множество M'_s узко, коротко (в силу леммы 2, как конечное объединение произведений узких, коротких ЧУМ; узость множеств $\mathcal{F}(\Sigma'_i)$ мы уже показали, их короткость следует из утверждения 4) и не более чем счётно.

Введём сигнатуру $\Sigma_\bullet = (M_0, \ldots, M_{s-2}, M'_{s-1}, Z(M_s; \{m_s\}), M_{s+1}, \ldots, M_n)$ и расширенную сигнатуру $\Sigma'_\bullet = (\Sigma_\bullet, \varnothing)$. Построим отображение φ: $\mathcal{F}(\Sigma') \to \mathcal{F}(\Sigma_\bullet)$. Пусть $G \in \mathcal{F}(\Sigma')$. Построим последовательность таких формул $G = G_0, G_1, \ldots, G_r$, что каждая следующая формула получена из предыдущей описанным ниже преобразованием, а к G_r это преобразованием не применимо. Обозначим через H самую левую максимальную по включению подформулу формулы G_t $(t = 0, \ldots, r-1)$ среди тех подформул вида (3), в которых $m' \geqslant m_s$. Если таких подформул нет, то преобразование неприменимо. Пусть i — такой минимальный индекс, что $H_i \in \mathcal{F}(\Sigma'_i)$. Подформулу H в G_t заменим формулой $(i, m', H_i)(H_1, \ldots, H_{i-1}, H_{i+1}, \ldots, H_s)$ (другими словами, включим подформулу H_i в имя функции) и полученную формулу примем за G_{t+1}. Так как каждый раз H выбирается максимальной, то к формуле H и её подформулам ранее не были применены никакие преобразования. Поэтому $H \in \mathcal{F}(\Sigma')$, что необходимо для наличия требуемой подформулы H_i.

Наконец, каждую подформулу H' формулы G_r вида $m_{s-1}(H'_1, \ldots, H'_{s-1})$, где $m_{s-1} \in M_{s-1}$ и $H'_1, \ldots, H'_{s-1}$ — формулы, заменим формулой $(0, m_{s-1})(H'_1, \ldots, H'_{s-1})$. В результате получим формулу над сигнатурой $\Sigma_\bullet$, которую и примем за $\varphi(G)$. Заметим, что формула G восстанавливается по своему образу $\varphi(G)$ однозначно, т. е. φ — инъекция. Заметим также, что обратное отображение φ^{-1} (определённое на образе отображения φ) сохраняет отношение частичного порядка, т. е. если $\varphi(G') \leqslant \varphi(G'')$, то $G' \leqslant G''$ (операции вертикального сжатия формул над $\Sigma_\bullet$, производимой с третьей координатой набора из множества $K_1 \cup \ldots \cup K_s$, соответствует операция горизонтального сжатия формул над Σ). Следовательно, если формулы G' и G'' несравнимы, то и формулы $\varphi(G')$ и $\varphi(G'')$ несравнимы.

Сигнатура $\Sigma'_\bullet$ строго предшествует сигнатуре Σ' и узка (ранее мы показали, что множество M'_{s-1} узко). Применив к $\Sigma'_\bullet$ предположение индукции, получим, что множество $\mathcal{F}(\Sigma'_\bullet)$ узко. Поэтому множество $\mathcal{F}(\Sigma')$ узко. Действительно, если $\mathcal{F}(\Sigma')$ неузко, то в нём найдётся бесконечное множество попарно несравнимых элементов $\{G_1, G_2, \dots\}$. Тогда множество формул $\{\varphi(G_1), \varphi(G_2), \dots\}$ в сигнатуре $\mathcal{F}(\Sigma'_\bullet)$ бесконечно и состоит из попарно несравнимых элементов, что невозможно. Лемма 4 доказана.

4. Доказательство основных утверждений

Пусть $K \subseteq \mathcal{E}(B)$ — произвольный инвариантный класс. Обозначим через K^* множество всех функций из K, тождественно не равных константе. Классу $K \subseteq \mathcal{E}(B)$ поставим в соответствие множество формул $\psi_B(K) \subseteq \mathcal{F}(\Sigma(B))$, а именно, $\psi_B(K)$ состоит из всевозможных формул $F'_B(g)$ для функций $g \in K^*$.

Лемма 5. *Для любого инвариантного класса $K \subseteq \mathcal{E}(B)$ множество $\psi_B(K)$ является инвариантным классом в $\mathcal{F}(\Sigma(B))$, причём множество K^* однозначно восстанавливается по $\psi_B(K)$.*

Доказательство. Пусть $K' = \psi_B(K)$. Покажем, что K' — инвариантный класс в $\mathcal{F}(\Sigma(B))$. Рассмотрим произвольную формулу $F'_B(g) \in K'$ и связанную с ней формулу $F_B(g)$. Пусть формула F'_1 над $\Sigma(B)$ предшествует формуле $F'_B(g)$; для простоты будем считать, что F'_1 получена из $F'_B(g)$ за одну операцию горизонтального сжатия, а именно $F'_1 = (F'_B(g))_{G' \to G'_i}$ (вертикальное сжатие неприменимо, так как все элементы множеств сигнатуры $\Sigma(B)$ попарно несравнимы).

Рассмотрим соответствующую формуле G' подформулу G формулы $F_B(g)$. Пусть $G = f'(G_1, \dots, G_s)$, где $f' \in B'$ и формулы $G_1, \dots, G_s$ соответствуют подформулам $G'_1, \dots, G'_s$ формулы G'. В силу неубывания функции f' ни по одной переменной существуют такие константы $c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_s$, что выполнено тождество (1). Далее, функция, реализуемая формулой G_j, $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$, существенно зависит хотя бы от одной переменной (как бесповторная суперпозиция функций, отличных от констант). Поэтому при некоторой подстановке констант вместо её переменных получится формула, тождественно равная c_j.

Таким образом, при некоторой подстановке констант вместо переменных формула G становится тождественно равной формуле G_i. Обозначим через F_1 формулу, полученную из $F_B(g)$ заменой подформулы G на G_i. Формула F_1 реализует некоторую подфункцию g' функции g и является своим неубывающим представителем. Поэтому $F_1 = F_B(g')$, а значит $F'_1 = F'_B(g')$. Так как функция g' принадлежит множеству K^*, то $F'_1 \in K'$.

Итак, K' является инвариантным классом в $\mathcal{F}(\Sigma(B))$. Покажем, что класс K' однозначно восстанавливается по множеству K^*. Предположим противное, т. е. в $\mathcal{E}(B)$ существуют два класса K_1 и K_2, соответствующие одному и тому же классу K', но имеющие разные множества K_1^* и K_2^*. Пусть, например, существует функция $h_1 \in K_1^* \backslash K_2^*$. Тогда $F'_B(h_1) \in K'$. Поэтому существует такая функция $h_2 \in K_2^*$, что $F'_B(h_2) = F'_B(h_1)$. Из последнего равенства следует, что функции h_1 и h_2 различаются, может быть, несущественными переменными и порядком следования переменных. Значит, $h_1 \in K_2^*$. Противоречие. Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 1. Из леммы 4 следует, что множество $\mathcal{F}(\Sigma(B))$ узко. Поэтому в силу леммы 1 множество $I(\mathcal{F}(\Sigma(B)))$ не более чем счётно. Пусть K — произвольный инвариантный класс из $\mathcal{E}(B)$. Заметим, что если множество K^* непусто, то класс K содержит обе константы. Следовательно, различным непустым множествам K^* соответствуют различные классы K. Тогда в силу леммы 5 ограничение отображения ψ на множество классов K, для которых $K^* \neq \varnothing$, является инъекцией. Образ этого отображения не более чем счётен, а значит, и число классов K с непустым множеством K^* не более чем счётно. Классов, состоящих только из констант, ровно четыре, поэтому число всех инвариантных классов в $\mathcal{E}(B)$ не более чем счётно. Это число не менее чем счётно, так как функции $x_1 \,\&\, \ldots \,\&\, x_m$, $m = 1, 2, \ldots$, бесповторно выразимы в любом полном базисе, следовательно, инвариантные классы $K_m = \{0, 1,\ x_{i_1} \,\&\, \ldots \,\&\, x_{i_j},\ j \leqslant m\}$ составляют счётное его подмножество. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Для произвольных $k > 2$ и $m \geqslant 1$ определим функцию

$$f_k^m(x_1, \ldots, x_m) = \begin{cases} x_1, & \text{если } x_1 = x_2 = \ldots = x_m; \\ 0, & \text{если среди } x_1, \ldots, x_m \text{ есть различные.} \end{cases}$$

Положим $B_k = \{f_k^2, 0, 1, \ldots, k-1\}$. Из тождества

$$f_k^m(x_1, \ldots, x_{m-1}, f_k^2(x_m, x_{m+1})) = f_k^{m+1}(x_1, \ldots, x_{m+1})$$

следует, что функция f_k^m бесповторно выразима в базисе B_k. При подстановке в функцию f_k^m хотя бы одной константы вместо переменной получится функция, не принимающая всех k значений. Так, при подстановке константы c вместо любой переменной, полученная функция будет принимать только значения 0 и c. Следовательно, ни одна собственная подфункция функции f_k^m не является функцией вида $f_k^{m'}$, $m' \neq m$. Тогда минимальный инвариантный класс K_M, содержащий множество $\{f_k^m \mid m \in M\}$ (M — подмножество множества натуральных чисел), не содержит функций вида $f_k^{m'}$, $m' \notin M$. Поэтому если $M_1 \neq M_2$, то $K_{M_1} \neq K_{M_2}$. Следовательно, мощность множества инвариантных классов не меньше мощности множества всех подмножеств множества натуральных чисел, которое равно континууму. Искомая мощность также не больше континуума, так как мощность множества всевозможных подмножеств множества P_k равна континууму. Теорема 2 доказана.

Теперь рассмотрим способы задания инвариантных классов из множества $\mathcal{E}(B)$ для булева базиса B. Следующая теорема 3 позволяет произвольный такой класс породить в $\mathcal{E}(B)$ конечным множеством запрещённых подфункций.

Теорема 3. *Пусть B — булев базис и $K \subseteq \mathcal{E}(B)$ — инвариантный класс. Тогда существует конечное множество функций $Q \subseteq \mathcal{E}(B)$ таких, что произвольная функция $g \in \mathcal{E}(B)$ принадлежит классу K тогда и только тогда, когда g не содержит в качестве подфункций ни одной функции из Q.*

Доказательство. На множестве P_2 рассмотрим следующее отношение эквивалентности $\sim$: две функции эквивалентны, если одну из них можно получить из другой путём перестановки переменных, а также добавления и изъятия несущественных переменных. На фактор-множестве $P_2/\!\sim$ введём отношение частичного порядка: класс функции g_1 предшествует классу функции g_2, если g_1 эквивалентна некоторой подфункции функции g_2. При этом имеется взаимно однозначное соответствие инвариантных классов в P_2 и инвариантных классов в $P_2/\!\sim$, рассматриваемом в смысле частично упорядоченного множества. Тогда в силу теоремы 1 число инвариантных классов в $\mathcal{E}(B)/\!\sim$ счётно, а значит, по лемме 1 каждый такой класс порождён конечным множеством запретов Q'. В каждом классе эквивалентности из Q' выберем по одной функции и образуем множество Q, состоящее из всех выбранных функций и всех функций, полученных из выбранных путём перестановки переменных. Очевидно, Q удовлетворяет условиям теоремы. Теорема 3 доказана.

Так как в силу результата В. А. Стеценко [3] класс $\mathcal{E}(\{\&, \vee, \neg\})$ нельзя породить в P_2 конечным множеством запрещённых подфункций, то в теореме 3 условие $g \in \mathcal{E}(B)$ нельзя заменить условием $g \in P_2$. Покажем, что каждый инвариантный класс из $\mathcal{E}(B)$ можно задать другим конечным способом — множеством формул, порождаемых некоторой контекстно-свободной грамматикой.

5. Контекстно-свободные грамматики

Сигнатуру $\Sigma = (M_0, \dots, M_n)$ назовём *простой*, если множества $M_0, \dots, M_n$ конечны и все их элементы попарно несравнимы. Пусть Σ — простая сигнатура и $A = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ — счётный алфавит, буквы которого будем называть *метасимволами. Контекстно-свободной* (*КС*) *грамматикой формульного типа* над Σ назовём конечную систему $\mathcal{G}$ *правил* вида

$$\alpha_i \to m_0, \quad \text{где } m_0 \in M_0, \tag{4}$$

или

$$\alpha_i \to m_s(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}), \text{ где } m_s \in M_s,\ s > 0,\ i_1 \geqslant i, \ldots, i_s \geqslant i. \tag{5}$$

Положим $M = M_0 \cup \ldots \cup M_n \cup \{'(', ')', ','\}$ и $M' = M \cup A$. Пусть v и w — слова в алфавите M'. Скажем, что слово w получено из v *применением* правила грамматики $\mathcal{G}$ вида (4) или (5), если w получено заменой некоторого метасимвола α_i в слове v на соответствующую правую часть правила. Скажем, что слово w в алфавите M *выводимо* в грамматике $\mathcal{G}$, если существует последовательность слов $w_0 = \alpha_0, w_1, \ldots, w_t = w$ в алфавите M', в которой каждое следующее слово получено из предыдущего применением правила грамматики $\mathcal{G}$. Множество слов, выводимых в $\mathcal{G}$, обозначим через $\mathcal{G}^*$. Нетрудно видеть, что в $\mathcal{G}$ можно вывести только формулы над Σ.

Обозначим через $\mathcal{G}(\alpha_j)$ грамматику, полученную из $\mathcal{G}$ удалением всех правил вида (4) или (5), в которых $i < j$, и заменой каждого метасимвола $\alpha_{i'}$ в оставшихся правилах на символ $\alpha_{i'-j}$ (эта операция корректна в силу условий $i_1 \geqslant i, \ldots, i_s \geqslant i$ в (5)). Слова, выводимые в грамматике $\mathcal{G}(\alpha_j)$ будем также называть словами, *выводимыми* в $\mathcal{G}$ *из символа* α_j. Заметим, что грамматике $\mathcal{G}$ можно поставить в соответствие ориентированный граф $\mathcal{G}'$, вершинами которого являются метасимволы, а дуга, ориентированная от α_i в α_j, присутствует тогда и только тогда, когда для некоторого правила вида (5) метасимвол a_j входит в его правую часть. Согласно определению $\mathcal{G}'$ не содержит ориентированных циклов за исключением петель. Можно было бы потребовать, чтобы этот граф являлся деревом с петлями, что равносильно данному выше определению (в смысле совпадения класса реализуемых языков): любой граф без ориентированных циклов, отличных от петель, можно привести к дереву с петлями дублированием отдельных фрагментов.

Лемма 6. *Пусть $\mathcal{G}$ — КС-грамматика формульного типа над Σ и F — формула над Σ. Тогда существует такая КС-грамматика формульного типа $\mathcal{G}_F$, что $\mathcal{G}_F^* = Z(\mathcal{G}^*; \{F\})$.*

Доказательство. Проведём индукцию по длине формулы F.

Базис индукции: $F = m_0$, где $m_0 \in M_0$. Для получения грамматики $\mathcal{G}_F$ необходимо и достаточно удалить из $\mathcal{G}$ все правила вида (4) с символом m_0 в правой части.

Индуктивный переход: $F = m_s(F_1, \ldots, F_s)$, где $m_s \in M_s$ и $F_1, \ldots, F_s$ — формулы над Σ. Пусть $\Pi_1, \ldots, \Pi_r$ — все правила вида (5) грамматики $\mathcal{G}$ с начальным символом m_s в правой части. Рассмотрим произвольное из них — Π_l. По предположению индукции, применённому к грамматике $\mathcal{G}(\alpha_{i_j})$, $1 \leqslant j \leqslant s$, и формуле F_j, существует грамматика $\mathcal{G}_j = \mathcal{G}(\alpha_{i_j})_{F_j}$, в которой множество выводимых формул совпадает с множеством $Z(\mathcal{G}(\alpha_{i_j})^*; \{F_j\})$. Пусть $N, N_1, \ldots, N_s$ — наибольшие номера метасимволов, встречающихся в грамматиках $\mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_s$ соответственно. Увеличим номера всех метасимволов грамматики $\mathcal{G}_j$, $1 \leqslant j \leqslant s$, на $N + N_1 + \ldots + N_{j-1} + j$ (так, чтобы метасимволы разных грамматик не пересекались), полученные грамматики добавим к $\mathcal{G}$, удалим из неё правило Π_l и введём правила $\alpha_i \to m_s(\alpha_{N+1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_s})$, $\alpha_i \to m_s(\alpha_{i_1}, \alpha_{N+N_1+2}, \alpha_{i_3}, \ldots, \alpha_{i_s})$, $\ldots$, $\alpha_i \to m_s(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_{s-1}}, \alpha_{N+N_1+\ldots+N_{s-1}+s})$, которые обозначим через $\Pi_l^1, \ldots, \Pi_l^s$.

Описанную процедуру проделаем последовательно для всех правил $\Pi_1, \ldots, \Pi_l$ (грамматика $\mathcal{G}$ при этом будет меняться, однако список $\Pi_1, \ldots, \Pi_l$ остаётся первоначальным). Полученную в результате грамматику обозначим через $\mathcal{G}'_F$. Далее, удалим из $\mathcal{G}'_F$ все правила, которые не могут быть применены ни в одном выводе и оставшуюся грамматику примем за $\mathcal{G}_F$. Пусть G — произвольная формула, которой предшествует F. Заметим, что если для любого правила вида (5) грамматики $\mathcal{G}_F$ (с тем же начальным символом m_s) такого, что хотя бы из одного символа α_{i_j} не может быть выведена никакая формула, которой предшествует F_j, то G не может быть выведена в $\mathcal{G}_F$. Пусть Π — такое правило. Тогда либо $\Pi = \Pi_l^j$ для некоторых l, j, либо Π — правило некоторой грамматики $\mathcal{G}_{j'}$ (с переименованными метасимволами). В первом случае из символа α_{i_j} не может быть выведена формула F_j. Во втором случае в грамматике $\mathcal{G}_{j'}$ не может быть выведена формула $F_{j'}$. Следовательно, формула $F_{j'}$ не может быть выведена ни из одного метасимвола, имеющегося в правой части правила Π. Таким образом мы показали, что G не может быть выведена в грамматике $\mathcal{G}_F$.

С другой стороны, в $\mathcal{G}_F$ может быть выведена любая формула из $\mathcal{G}^*$, которой не предшествует F. Действительно, пусть F не предшествует формуле G'. Будем выводить формулу G' в грамматике $\mathcal{G}_F$ так же, как она выводилась в $\mathcal{G}$ до тех пор, пока не встретится применение правила Π_l вида (5) с данным начальным символом m_s. Далее вывод в $\mathcal{G}$ формулы G' шёл таким образом, что хотя бы из одного символа α_{i_j} была выведена некоторая формула G'_j, которой не предшествует F_j. В противном случае формуле G' предшествовала бы F. Тогда вместо правила Π_l применим правило Π_l^j. По предположению индукции из символа $\alpha_{N+N_1+\ldots+N_{j-1}+j}$ можно вывести требуемую формулу G'_j. К остальным символам $\alpha_{i_{j'}}$, $j' \neq j$, применимы прежние рассуждения. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть Σ — простая сигнатура и K — инвариантный класс в*

$\mathcal{F}(\Sigma)$. Тогда существует такая КС-грамматика формульного типа $\mathcal{G}$ над сигнатурой Σ, что $\mathcal{G}^* = K$.

Доказательство. Согласно лемме 4 множество $\mathcal{F}(\Sigma)$ узко. Поэтому в силу леммы 1 класс K может быть задан в $\mathcal{F}(\Sigma)$ конечным множеством запретов: $K = Z(\mathcal{F}(\Sigma); \{F_1, \ldots, F_p\})$. Проведём индукцию по числу p.

Базис индукции: $p = 0$. В этом случае $K = \mathcal{F}(\Sigma)$. Очевидно, что множество всех формул над Σ задаётся следующей грамматикой:

$$\{\alpha_0 \to m_0 \mid m_0 \in M_0\} \cup \{\alpha_0 \to m_s(\alpha_0, \ldots, \alpha_0) \mid m_s \in M_s,\ 1 \leqslant s \leqslant n\}.$$

Индуктивный переход: $p \geqslant 1$. По предположению индукции класс $K_1 = Z(\mathcal{F}(\Sigma); \{F_1, \ldots, F_{p-1}\})$ задаётся некоторой грамматикой $\mathcal{G}_1$. Очевидно, что $K = Z(K_1; \{F_p\})$. Поэтому в силу леммы 6 класс K также задаётся некоторой грамматикой $\mathcal{G}$. Лемма 7 доказана.

Теорема 4. *Пусть K — инвариантный класс булевых функций и $K \subseteq \mathcal{E}(B)$. Тогда существует КС-грамматика формульного типа $\mathcal{G}$ над сигнатурой $\Sigma(B)$ такая, что множество K^* содержит только такие функции, которые можно задать формулами, получающимися из формул множества $\mathcal{G}^*$ посредством замены символов y^1 (y^0) на попарно различные переменные (их отрицания).*

Доказательство. Рассмотрим класс $K' = \psi_B(K) \subseteq \mathcal{F}(\Sigma(B))$. Согласно лемме 5 он инвариантен. Поэтому в силу леммы 7 его можно задать некоторой КС-грамматикой $\mathcal{G}$ формульного типа (т. е. $K' = \mathcal{G}^*$). Пусть $g \in K^*$. Формулу $F_B(g)$ можно получить из соответствующей формулы $F'_B(g)$ путём замены символов y^1 (y^0) на попарно различные переменные (с отрицаниями). Любая другая формула, полученная из $F'_B(g)$ тем же способом, реализует некоторую функцию g', которая может быть получена из g перестановкой переменных, добавлением и отбрасыванием несущественных переменных. Поэтому $g' \in K^*$. Теорема 4 доказана.

Литература

1. Яблонский С. В. Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем // Проблемы кибернетики. Вып. 2. М.: Физматгиз, 1959. С. 75–121.

2. Кузнецов А. В. О бесповторных контактных схемах и бесповторных суперпозициях функций алгебры логики // Сборник статей по математической логике и её приложениям к некоторым вопросам кибернетики. М.: Изд-во АН

СССР, 1958. С. 186-225. (Труды математического ин-та им. В. А. Стеклова; т. 51).

3. Стеценко В. А. О предплохих базисах в P_2 // Математические вопросы кибернетики. Вып. 4. М.: Наука, 1992. С. 139–177.

МГУ, мех.-мат. факультет, Воробьевы горы, 119992 Москва, Россия