УДК 519.714

О СЛОЖНОСТИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СЕТЕЙ ГЛУБИНЫ 2

Д. Ю. Черухин

Доказана нижняя оценка $\Omega(n \log_2 n)$ для сложности произвольной информационной сети глубины 2 с n входами и n выходами, у которой входы независимы, выходы независимы и общая информация любого входа и любого выхода в n раз меньше энтропии любого входа или выхода. В качестве следствия получена аналогичная оценка для булевых схем глубины 2, реализующих систему ортогональных перестановочных операторов, например, оператор циклического сдвига.

Формализуем свойства информации, которые мы будем использовать при доказательстве нижней оценки сложности. *Информационным пространством* (*ИП*) назовём набор $\mathcal{S} = (M, \circ, |\cdot|)$, где M — множество объектов, называемых *сообщениями*, $\circ$: $M^2 \to M$ — операция *объединения* сообщений, $|\cdot|$: $M \to \mathbb{R}$ — функционал *нормы* сообщения (норму мы понимаем как количество информации), если для любых $x, y, z \in M$ выполнены следующие аксиомы:

I. $x \circ x = x$; II. $x \circ y = y \circ x$; III. $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$;

IV. $\exists \Lambda \in M$ $(|\Lambda| = 0 \,\&\, \forall t \in M\ \Lambda \circ t = t)$;

V. $|x \circ y| + |x \circ z| \geqslant |x \circ y \circ z| + |x|$ (сильная субаддитивность).

В дальнейшем, некоторые факты, относящиеся к теории ИП, будут излагаться или доказываться недостаточно подробно. Более подробное изложение содержится в другой работе автора, сданной в печать. Пусть $\mathcal{S} = (M, \circ, |\cdot|)$ — ИП, $x, y, z, u \in M$. Обозначим $|x|_u = |x \circ u| - |u|$. Тогда набор $\mathcal{S}_u = (M, \circ, |\cdot|_u)$ также является ИП (достаточно проверить аксиому V: $|x \circ y|_u + |x \circ z|_u = |x \circ y \circ u| + |x \circ z \circ u| - 2|u| \geqslant |x \circ y \circ z \circ u| + |x \circ u| - 2|u| = |x \circ y \circ z|_u + |x|_u$).

Введём обозначения: $I(x, y) = |x| + |y| - |x \circ y|$; $x \subseteq y \iff |x \circ y| = |y|$. Если в терминах ИП определена некоторая функция (или отношение) φ, то через φ_u будем обозначать эту функцию, взятую относительно нормы $|\cdot|_u$. Например, $x \subseteq_u y \iff |x \circ y|_u = |y|_u$.

Утверждение 1. *Для любых сообщений x, y, z: а) $(|x|_y)_z = |x|_{y\circ z}$; б) $|x| = I(x,y) + |x|_y$; в) $I(x, y\circ z) = I_z(x,y) + I(x,z)$; г) $|x| \geqslant 0$; д) $|x\circ y| \geqslant |x|$; е) $I(x,y) \geqslant 0$; ж) $I(x, y\circ z) \geqslant I_z(x,y)$; з) $I(x, y\circ z) \geqslant I(x,y)$.*

Если $x \subseteq y$, то: и) $I(x,y) = |x|$; к) $x \subseteq y\circ z$; л) $x \subseteq_z y$.

Если $I(x,y) = 0$, то: м) $I(x\circ y, z) \geqslant I(x,z) + I(y,z)$.

Доказательство. Пункты а), б), в), и) доказываются раскрытием определений; г), д) и е) следуют из аксиомы V: в первом случае нужно положить $y = z$, $x = \Lambda$, во втором — $y = z$, в третьем — $x = \Lambda$; пп. ж), з) следуют из в) и е).

Докажем к) и л): $|x\circ y| + |y\circ z| \geqslant |y| + |x\circ y\circ z| \Longrightarrow 0 = |x\circ y| - |y| \geqslant |x\circ y\circ z| - |y\circ z| \Longrightarrow |y\circ z| \geqslant |x\circ y\circ z|$; с другой стороны, в силу д), $|y\circ z| \leqslant |x\circ y\circ z|$. Имеем $|y\circ z| = |x\circ y\circ z| \Longrightarrow x \subseteq y\circ z$. В то же время, $|y\circ z| = |x\circ y\circ z| \Longrightarrow |y|_z = |x\circ y|_z \Longrightarrow x \subseteq_z y$.

Наконец, используя в) и з), докажем м): $I(x\circ y, z) = I(x,z) + I_x(y,z) = I(x,z) + I(y, x\circ z) - I(y,x) = I(x,z) + I(y, x\circ z) \geqslant I(x,z) + I(y,z)$. □

Будем называть (n,m)-*сетью* (или просто *сетью*) конечный ориентированный граф без ориентированных циклов, в котором выделены n входов и m выходов, причём ни в один из входов не входят рёбра. Входы сети обозначим через $x_1, \ldots, x_n$, выходы — через $y_1, \ldots, y_m$. Введём обозначения: $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Сложностью сети назовём число рёбер в ней, глубиной — наибольшую длину ориентированного пути в данной сети. Сеть назовём двухярусной, если длина любого её ориентированного пути, соединяющего вход с выходом, равна 2. Любая сеть глубины 2 очевидными преобразованиями, увеличивающими сложность не более, чем в константу раз, сводится к двухярусной, поэтому ограничимся рассмотрением двухярусных сетей.

Скажем, что (n,n)-сеть является *равномерной информационной* (сокращённо, *n-РИС*), если каждой её вершине v приписано сообщение $\hat{v}$ из некоторого фиксированного ИП, причём выполнены свойства:

i) если $v_1, \ldots, v_s$ — все вершины, из которых выходят рёбра, входящие в v, то $\hat{v} \subseteq \hat{v}_1 \circ \ldots \circ \hat{v}_s$;

ii) $\forall v\ |\hat{v}| \leqslant 1$; iii) $|\hat{y}_1 \circ \ldots \circ \hat{y}_n| = n$, $\forall i,j\ I(x_i, y_j) = \frac{1}{n}$.

Пусть S — сеть с множеством вершин W, $V \subseteq W$, $U \subseteq W$. Через $S\backslash V$ обозначим сеть, полученную из S удалением всех вершин из V (V может содержать входы и выходы). Скажем, что множество V *опирается* на множество U, если в любом ориентированном пути, идущем из некоторого входа в некоторую вершину из множества V, содержится хотя бы одна вершина из U. Если сеть является n-РИС и $V = \{v_1, \ldots, v_s\}$, то обозначим $\hat{V} = \hat{v}_1 \circ \ldots \circ \hat{v}_s$. Несложно показать, что если V опирается на U, то $\hat{V} \subseteq \hat{U}$.

Утверждение 2. *Пусть S — n-РИС, $X_1 \subseteq X$, $Y_1 \subseteq Y$. Тогда: а) $|\hat{X}_1| = |X_1|$; б) $|\hat{Y}_1| = |Y_1|$; в) $I(\hat{X}_1, \hat{Y}_1) = \frac{1}{n} \cdot |X_1| \cdot |Y_1|$.*

Доказательство. Обозначим $X_2 = X \backslash X_1$, $Y_2 = Y \backslash Y_1$. Заметим, что множество Y опирается на X, а значит, $\hat{Y} \subseteq \hat{X}$.

б) Имеем

$$n = |\hat{Y}| = |\hat{Y}_1 \circ \hat{Y}_2| \leqslant |\hat{Y}_1| + |\hat{Y}_2| \leqslant |Y_1| + |\hat{Y}_2| \leqslant |Y_1| + |Y_2| = n. \qquad (1)$$

Так как правая и левая части (1) равны, то все неравенства можно заменить равенствами, а значит, $|\hat{Y}_1| = |Y_1|$.

а) В силу $\hat{Y} \subseteq \hat{X}$ имеем $n = |\hat{Y}| \leqslant |\hat{X}| \leqslant n$, а значит, $|\hat{X}| = n$. Тогда а) доказывается аналогично б).

в) Из $\hat{Y} \subseteq \hat{X}$ следует $I(\hat{X}, \hat{Y}) = |\hat{X}| + |\hat{Y}| - |\hat{X} \circ \hat{Y}| = |\hat{Y}| = n$. В силу п. а), для любых непересекающихся $X', X'' \subseteq X$ выполнено $I(\hat{X}', \hat{X}'') = 0$; в силу п. б), аналогичное верно для множества Y. Тогда, используя утв. 1 м), получим

$$n = I(\hat{X}, \hat{Y}) \geqslant I(\hat{X}_1, \hat{Y}_1) + I(\hat{X}_2, \hat{Y}_1) + I(\hat{X}, \hat{Y}_2) \geqslant \sum_{i,j} I(\hat{x}_i, \hat{y}_j) = n. \qquad (2)$$

Заменив в (2) все неравенства равенствами, получим требуемое. □

Если S — (n, m)-сеть, то через $M^S = (m^S_{ij})$ обозначим булеву матрицу размера $n \times m$, в которой $m^S_{ij} = 1 \iff$ существует ориентированный путь из x_i в y_j. Пусть $M = (m_{ij})$ — булева матрица размера $n \times m$. Пару $(i, j) \subseteq \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$ назовём *нижним нулём* матрицы M, если $\forall i' \in \{1, \ldots, i\}$ $\forall j' \in \{1, \ldots, j\}$ $m_{i'j'} = 0$. Введём обозначения: $N(M)$ — число нижних нулей матрицы M, $N^*(M) = \max\limits_{M'} N(M')$, где максимум берётся по всем матрицам M', полученным из M некоторой перестановкой строк и столбцов.

Лемма 1. *Пусть S — n-РИС и Z — подмножество множества её вершин. Тогда $N^*(M^{S \backslash Z}) \leqslant n|Z|$.*

Доказательство. В силу симметрии можно считать, что входы и выходы занумерованы так, что $N^*(M^{S \backslash Z}) = N(M^{S \backslash Z})$. Пусть $i \in \{1, \ldots, n\}$. Обозначим: $X'_i = \{x_j \mid m^{S \backslash Z}_{ji} = 1\}$, $\theta_i = \hat{X}'_i \circ \hat{y}_i$, $X_i = X'_1 \cup \ldots \cup X'_i$, $Y_i = \{y_1, \ldots, y_i\}$. Множество $\{y_i\}$ опирается (в сети S) на множество

$X_i' \cup Z$, следовательно, $\hat{y}_i \subseteq \hat{X}_i' \circ \hat{Z}$, Тогда, в силу утв. 1 к, л), $\hat{y}_i \subseteq_{\hat{Y}_{i-1}} \hat{X}_i \circ \hat{Z}$, а значит (используем утв. 1 и),

$$I_{\hat{Y}_{i-1}}(\hat{X}_i \circ \hat{Z},\ \hat{y}_i) = |\hat{y}_i|_{\hat{Y}_{i-1}}. \tag{3}$$

Имеем:

$$|Z| \geqslant |\hat{Z}| \overset{\text{утв. 1 б)}}{=} I(\hat{Z},\theta_1) + |\hat{Z}|_{\theta_1} = I(\hat{Z},\theta_1) + I_{\theta_1}(\hat{Z},\theta_2) + |\hat{Z}|_{\theta_1 \circ \theta_2} = \ldots =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} I_{\hat{X}_{i-1}\circ\hat{Y}_{i-1}}(\hat{Z},\theta_i) + |\hat{Z}|_{\hat{X}_n \circ \hat{Y}_n} \overset{\text{утв. 1 г)}}{\geqslant} \sum_{i=1}^{n} I_{\hat{X}_{i-1}\circ\hat{Y}_{i-1}}(\hat{Z},\theta_i) \overset{\text{утв. 1 ж)}}{\geqslant}$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n} I_{\hat{X}_i \circ \hat{Y}_{i-1}}(\hat{Z},\hat{y}_i) \overset{\text{утв. 1 в)}}{=} \sum_i \Big(I_{\hat{Y}_{i-1}}(\hat{X}_i \circ \hat{Z}, \hat{y}_i) - I_{\hat{Y}_{i-1}}(\hat{X}_i, \hat{y}_i) \Big) \overset{(3)}{=}$$

$$= \sum_i \Big(|\hat{y}_i|_{\hat{Y}_{i-1}} - I_{\hat{Y}_{i-1}}(\hat{X}_i, \hat{y}_i) \Big) \overset{\text{утв. 1 в)}}{=}$$

$$= \sum_i \Big(|\hat{Y}_i| - |\hat{Y}_{i-1}| - (I(\hat{X}_i,\hat{Y}_i) - I(\hat{X}_i,\hat{Y}_{i-1})) \Big) \overset{\text{утв. 2}}{=}$$

$$= \sum_i \Big(i - (i-1) - \frac{1}{n}|X_i| \cdot (i - (i-1)) \Big) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_i (n - |X_i|) = \frac{1}{n}\sum_i |(X \backslash X_1') \cap \ldots \cap (X \backslash X_i')|. \tag{4}$$

Осталось заметить, что в множестве $(X \backslash X_1') \cap \ldots \cap (X \backslash X_i')$ содержатся все x_j такие, что пара (j,i) является нижним нулём матрицы $M^{S\backslash Z}$. Поэтому, продолжая (4), получим $|Z| \geqslant \frac{1}{n} N(M^{S\backslash Z}) = \frac{1}{n} N^*(M^{S\backslash Z})$. □

Лемма 2. *Пусть S — двухярусная (n,n)-сеть, каждый её вход и каждый выход инцидентен не более, чем r рёбрам, и k — число нулей в матрице M^S. Тогда*

$$N^*(M^S) \geqslant \frac{k}{C_{2r}^r}.$$

Доказательство. Пусть $V = \{v_1, \ldots, v_t\}$ — множество вершин среднего слоя сети S (т. е. вершин, отличных от входов и выходов). Обозначим через V_i $(i = 1, \ldots, n)$ множество вершин из V, смежных с x_i, через W_j $(j = 1, \ldots, n)$ — множество вершин из V, смежных с y_j. Тогда $|V_i| \leqslant r$, $|W_j| \leqslant r$. Заметим, что $m_{ij}^S = 0 \iff V_i \cap W_j = \varnothing$.

Рассмотрим произвольную перестановку $\tau \in S_t$. Обозначим $X_i^\tau = \max\{\tau(l) \mid v_l \in V_i\}$, $Y_j^\tau = \min\{\tau(l) \mid v_l \in W_j\}$. Существуют такие перестановки $\sigma, \pi \in S_n$, что

$$X^\tau_{\sigma(1)} \leqslant \ldots \leqslant X^\tau_{\sigma(n)} \quad \text{и} \quad Y^\tau_{\pi(1)} \geqslant \ldots \geqslant Y^\tau_{\pi(n)}. \tag{5}$$

Рассмотрим матрицу $M' = (m'_{ij})$, где $m'_{ij} = m^S_{\sigma(i)\pi(j)}$, полученную из M^S перестановкой строк и столбцов. Если для некоторых i, j выполнено $X^\tau_{\sigma(i)} < Y^\tau_{\pi(j)}$, то в силу (5) для любых $i' \leqslant i$, $j' \leqslant j$ выполнено $X^\tau_{\sigma(i')} < Y^\tau_{\pi(j')}$. Тогда $V_{\sigma(i')} \cap W_{\pi(j')} = \varnothing$, следовательно, $m'_{i'j'} = 0$. Итак, если $X^\tau_{\sigma(i)} < Y^\tau_{\pi(j)}$, то (i, j) — нижний нуль матрицы M', а значит,

$$N^*(M^S) \geqslant N(M') \geqslant |\{(i,j) \mid X^\tau_{\sigma(i)} < Y^\tau_{\pi(j)}\}| = |\{(i,j) \mid X^\tau_i < Y^\tau_j\}|. \tag{6}$$

Рассмотрим произвольную пару (i, j) такую, что $m^S_{ij} = 0$ и оценим долю тех перестановок τ, для которых $X_i^\tau < Y_j^\tau$. Пусть $|V_i| = p$, $|W_j| = q$. Если зафиксировать множество мест, на которые расставлены вершины из $V_i \cup W_j$, то условию $X_i^\tau < Y_j^\tau$ удовлетворяют те перестановки τ, для которых на первых p из этих мест стоят вершины из V_i, а на последних q — вершины из W_j. Следовательно, искомая доля равна $\frac{1}{C^p_{p+q}} \geqslant \frac{1}{C^r_{2r}}$.

Суммируя (6) по всем τ, окончательно получим

$$N^*(M^S) \geqslant \frac{1}{t!} |\{(i,j,\tau) \mid X_i^\tau < Y_j^\tau\}| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{t!} \sum_{i,j\colon m_{ij}=0} |\{\tau \mid X_i^\tau < Y_j^\tau\}| \geqslant \frac{1}{t!} \cdot k \cdot \frac{t!}{C^r_{2r}} = \frac{k}{C^r_{2r}}. \quad \square$$

Теорема 1. *Сложность двухярусной n-РИС по порядку не меньше, чем $n \log_2 n$.*

Доказательство. Пусть S — двухярусная n-РИС минимальной сложности, равной L. Обозначим $r = [\frac{2L}{n}]$. Через X_1 обозначим множество входов, смежных более, чем с r вершинами, через Y_1 — множество выходов, смежных более, чем с r вершинами, через Z — множество вершин среднего слоя, смежных более, чем с $\frac{n}{4r}$ выходами. Пусть $S' = S \backslash (X_1 \cup Y_1 \cup Z)$, $X_2 = X \backslash X_1$, $Y_2 = Y \backslash Y_1$. Рёбра двухярусной сети, инцидентные разным входам и выходам, различны, поэтому $L \geqslant (r+1)(|X_1| + |Y_1|) > \frac{2L}{n}(|X_1| + |Y_1|)$; аналогично, $L \geqslant \frac{n}{4r}|Z|$. Следовательно,

$$|X_1| \leqslant \frac{n}{2}, \quad |Y_1| \leqslant \frac{n}{2}, \quad |Z| \leqslant L \cdot \frac{4r}{n} \leqslant 2r(r+1). \tag{7}$$

Пусть k — число нулей в матрице $M^{S'}$. Каждый вход сети S' смежен не более, чем r вершинами среднего слоя (сети S'), каждая из которых, в свою очередь, смежна с не более, чем $\frac{n}{4r}$ выходами. Следовательно, из каждого входа сети S' можно попасть по ориентированным путям не более, чем в $r \cdot \frac{n}{4r} = \frac{n}{4}$ выходов. Значит, число единиц в матрице $M^{S'}$ не больше, чем $|X_2| \cdot \frac{n}{4}$. Тогда, с учётом (7),

$$k \geqslant |X_2| \cdot |Y_2| - |X_2| \cdot \frac{n}{4} = |X_2| \cdot \Big(|Y_2| - \frac{n}{4}\Big) \geqslant \frac{n}{2} \cdot \Big(\frac{n}{2} - \frac{n}{4}\Big) = \frac{n^2}{8}. \qquad (8)$$

Собирая вместе леммы 1, 2, выкладки (7), (8) и учитывая, что матрица $M^{S'}$ является подматрицей матрицы $M^{S \setminus Z}$, получим

$$\frac{n^2}{8C_{2r}^r} \leqslant \frac{k}{C_{2r}^r} \leqslant N^*(M^{S'}) \leqslant N^*(M^{S \setminus Z}) \leqslant n|Z| \leqslant 2nr(r+1),$$

откуда $n \leqslant 16C_{2r}^r r(r+1) \leqslant 4^{r(1+o(1))}$. Раскрывая определение r, получим требуемое. $\square$

В заключение покажем, как применить теорему 1 к получению аналогичной нижней оценки для сложности схем из функциональных элементов (СФЭ, [1]) глубины 2 в базисе, состоящем из всех булевых функций.

Пусть $P_2(n) = \{f \mid f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}\}$. Рассмотрим ИП $\mathcal{S}_n = (M_n, \circ, |\cdot|)$, где M_n — множество подмножеств множества $P_2(n)$, $\circ$ — операция объединения множеств, норму $|\cdot|$ определим следующим образом. Пусть $\mathcal{F} \in M$, $K_1, \ldots, K_s$ — все максимальные подмножества в $\{0,1\}^n$, на каждом из которых любая функция $f \in \mathcal{F}$ постоянна. Тогда положим

$$|\mathcal{F}| = \sum_{i=1}^{s} p_i \log_2 \frac{1}{p_i}, \quad \text{где } p_i = \frac{|K_i|}{2^n}. \qquad (9)$$

Несложно убедиться, что аксиомы I–IV выполнены. Поясним, почему выполнена аксиома V. Фактически, функции из $P_2(n)$ мы рассматриваем как случайные величины с множеством элементарных событий $\{0,1\}^n$. При этом множества функций соответствуют совместному распределению случайных величин, а норма (9) есть энтропия Шеннона [2] совместного распределения (заметим, что энтропия совместного распределения не зависит от порядка случайных величин в наборе, поэтому вместо набора можно рассмотреть их множество). Тогда аксиома V следует из свойства сильной субаддитивности энтропии Шеннона, которое хорошо известно.

Рассмотрим также ИП $\mathcal{S}'_n = (M'_n, \circ', |\cdot|')$, где $M'_n = M_n^n$, $(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n) \circ' (\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n) = (\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \circ \mathcal{G}_n)$ и $|(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n)|' = \frac{1}{n}(|\mathcal{F}_1| + \ldots + |\mathcal{F}_n|)$. Можно сказать, что $\mathcal{S}'_n$ есть прямая сумма n экземпляров ИП S_n, в которой норма уменьшена в n раз. Аксиомы I–V для $\mathcal{S}'_n$ непосредственно следуют из соответствующих аксиом для $\mathcal{S}_n$.

Каждой перестановке $\sigma \in S_n$ соответствует булев *перестановочный оператор* $F_\sigma\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$, $F_\sigma(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$. Набор перестановок $\Sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ назовём *ортогональным*, если для любого i набор $(\sigma_1(i), \ldots, \sigma_n(i))$ является перестановкой.

Пусть Σ — ортогональный набор перестановок и $F_\Sigma\colon \{0,1\}^{n+k} \to \{0,1\}^n$ — булев оператор, зависящий от переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k$ ($k = O(n)$), такой, что для любой перестановки σ_i из набора Σ оператор F_{σ_i} можно получить из F_Σ подстановкой некоторых констант вместо переменных $y_1, \ldots, y_k$. Далее, пусть S — СФЭ, вычисляющая оператор F. Подставив в S вместо входов $y_1, \ldots, y_k$ соответствующие константы, мы получим СФЭ S_i, вычисляющую оператор F_{σ_i}.

Через S' обозначим (n,n)-сеть, полученную из S удалением всех вершин, опирающихся на множество $\{y_1, \ldots, y_k\}$. Каждой вершине v сети S' поставим в соответствие сообщение $\hat{v}$ из ИП $\mathcal{S}'_n$ следующим образом. Пусть f_i^v — функция от переменных $x_1, \ldots, x_n$, вычисляемая в вершине v схемы S_i. Положим $\hat{v} = (\{f_1^v\}, \ldots, \{f_n^v\})$. Можно убедиться, что сеть S' вместе с сообщениями $\hat{v}$ является n-РИС.

Следствие 1. *Сложность любого оператора F_Σ в классе СФЭ глубины 2 по порядку не меньше, чем $n \log_2 n$.*

Отметим, что в рассматриваемом классе схем глубины 2 известны нижние оценки вида $\Omega(n^{3/2})$ [3]. Кроме того, оценка вида $\Omega(n \log_2 n)$ известна для одного из операторов вида F_Σ, а именно, для оператора циклического сдвига [4]. Отметим, что в работе [4] существенно используется согласованность перестановок, входящих в набор Σ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (программа поддержки ведущих научных школ, проект НШ-5400.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лупанов О. Б.* Нижние оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
2. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963.
3. *Черухин Д. Ю.* Нижняя оценка сложности в классе схем глубины 2 без ограничений на базис // Вестник моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2005 **4**. 54–56.
4. *Pudlak P., Savicky P.* On shifting networks // Theoretical Computer Science. 1993 **116**. 415–419.