УДК 519.6

Д. Ю. Черухин (Москва)

НИЖНИЕ ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ КОММУТАЦИОННЫХ СЕТЕЙ

Пусть G — конечный связный неориентированный граф, V — множество его вершин. Пусть также U и W — непересекающиеся подмножества множества V, элементы которых мы будем называть, соответственно, *входами* и *выходами.* Тройку $S = (G, U, W)$ назовём *коммутационной сетью. Сложностью* $L(S)$ коммутационной сети S назовём число рёбер в графе G.

Коммутацией в сети S назовём множество попарно непересекающихся ни по рёбрам, ни по вершинам путей в графе G, у каждого из которых один конец является входом, а другой — выходом. Скажем, что коммутация K *соединяет* вход u с выходом w, если существует путь Π, $\Pi \in K$, концами которого являются вершины u и w. *Типом* коммутации K называется множество всевозможных пар (u, w), таких, что K соединяет вход u с выходом w.

Пусть $K_1, \ldots, K_m$ — коммутации в сети S. Для любого входа u и выхода w обозначим через $N(u, w)$ количество коммутаций среди $K_1 \ldots, K_m$, соединяющих u с w. Положим

$$p(u, w) = \frac{1}{m} N(u, w).$$

Другими словами, $p(u, w)$ — это вероятность того, что случайно выбранная коммутация из множества $\{K_1, \ldots, K_m\}$ (распределённая равномерно на этом множестве) соединяет вход u с выходом w.

Теорема 1.

$$L(S) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{u \in U, w \in W} p(u, w) \log_2 \left(\frac{1}{p(u, w)} \right).$$

Теорема 1 позволяет оценить сложность коммутационной сети S, используя информацию только о типах некоторых коммутаций в S.

Пример 1. Пусть в сети S имеется n входов, n выходов (входы и выходы занумерованы числами $0, \ldots, n-1$), и такие коммутации $K_0, \ldots, K_{n-1}$, что для любых i и j, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, коммутация K_j соединяет i-й вход с $(i+j)(\mathrm{mod}\ n)$-м выходом. Другими словами, имеется коммутация K_0, соединяющая каждый вход с одноимённым выходом, а также коммутации всех типов, полученных циклической перестановкой выходов в типе коммутации K_0. Тогда для любых u и w имеем $p(u,w) = \frac{1}{n}$, следовательно по теореме 1,

$$L(S) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{u \in U, w \in W} \frac{1}{n} \log_2 n = \frac{1}{2}|U| \cdot |W| \cdot \frac{1}{n} \log_2 n = \frac{1}{2} n^2 \cdot \frac{1}{n} \log_2 n = \frac{1}{2} n \log_2 n.$$

Частный случай теоремы 1, рассмотренный в примере 1, доказан в работе [1].

Автор выражает благодарность чл.-корр. РАН О. Б. Лупанову за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99–01–01175), ФЦП "Интеграция" (проект АО–110), Программы "Университеты России" (проект 992206), и Программы поддержки ведущих научных школ РФФИ (проект 00–15–96103).

Литература

1. Pippenger N., Valiant L. G. Shifting graphs and their properties // J. ACM. — 1976. — V. 23. — P. 423–432.

Адрес автора: 119899, Москва, МГУ, мехмат, каф. дискр. мат.
Тел.: (095) 939–42–68
E-mail: dyucher@mech.math.msu.su