АЛГОРИТМ СРАВНЕНИЯ БУЛЕВЫХ БАЗИСОВ

Д. Ю. Черухин (Москва)

Базисом будем называть произвольную полную конечную систему булевых функций. Сложностью формулы назовём число вхождений в неё символов переменных. Сложностью $L_Б(f)$ булевой функции f в базисе $Б$ называется наименьшая из сложностей формул в $Б$, реализующих функцию f. Скажем, что базис $Б_1$ не хуже базиса $Б_2$ ($Б_1 \leq Б_2$), если существует такое число $C > 0$, что для любой функции f выполнено $L_{Б_1}(f) \leq C \cdot L_{Б_2}(f)$. Базисы $Б_1$ и $Б_2$ эквивалентны, если $Б_1 \leq Б_2$ и $Б_2 \leq Б_1$. Базис $Б_1$ лучше $Б_2$, если $Б_1 \leq Б_2$ и $Б_2 \not\leq Б_1$. Базисы $Б_1$ и $Б_2$ несравнимы, если $Б_1 \not\leq Б_2$ и $Б_2 \not\leq Б_1$.

О. Б. Лупанов показал (см. [2]), что любой базис не хуже базиса $Б_0 = \{\&, \vee, \neg\}$. Б. А. Субботовская дала [2] критерий эквивалентности произвольного базиса базису $Б_0$ и привела пример базиса, лучшего $Б_0$. В. А. Стеценко дал [1] необходимое условие непосредственного предшествования произвольного базиса базису $Б_0$. Автор построил бесконечную последовательность улучшающихся базисов [3], бесконечное множество попарно несравнимых базисов и классифицировал с точностью до эквивалентности базисы, непосредственно предшествующие базису $Б_0$ (статья отдана в журнал ««Дискретная математика»»).

Скажем, что функция f бесповторно выражается через множество функций M, если существует такая формула F над множеством M, что F реализует f и каждая существенная переменная функции f входит в F ровно один раз. Функция называется неразложимой, если она бесповторно не выражается через множество всех функций меньшего числа аргументов. Обозначим через $\langle M \rangle$ множество всех неразложимых функций, получающихся из функций множества M путём фиксации некоторых их переменных (возможно, ни одной) какими-либо константами, перестановки переменных (биективной), замены некоторых переменных их отрицаниями, и (возможно) замены функции её отрицанием.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $Б_1$ и $Б_2$ — произвольные базисы. Тогда условия 1) $Б_1$ не хуже $Б_2$; 2) все функции из $Б_2$ бесповторно выражаются через $Б_1$; и 3) $\langle Б_1 \rangle \supseteq \langle Б_2 \rangle$; равносильны.

ТЕОРЕМА 2. Существует алгоритм, который для произвольных базисов $Б_1$ и $Б_2$ определяет, выполнено отношение $Б_1 \leq Б_2$, или нет.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-01-01175) и ФЦП „Интеграция“ (проект 473).

Список литературы

1. Стеценко В. А. О предплохих базисах в P_2 // Математические вопросы кибернетики — М.: Наука. 1992. — Вып. 4. — С. 139–177.

2. Субботовская Б. А. О сравнении базисов при реализации функций алгебры логики формулами // ДАН СССР. — 1963. — Т. 149, N 4. — С. 784–787.

3. Черухин Д. Ю. Об одной бесконечной последовательности улучшающихся булевых базисов // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. — 1997. — Т. 4, N 4. — С. 79–95.