S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 165–184 (2014) УДК 519.714
MSC 03D15

О НИЖНИХ ОЦЕНКАХ ФОРМУЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ ЛИНЕЙНОЙ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

К.Л. РЫЧКОВ

Abstract. Given proof of the lower boundaries of the computational complexity of the linear Boolean function $x_1 + \ldots + x_n = 1 \pmod 2$ by formulas in the basis $\{\vee, \wedge, ^-\}$. It is proved that for $n = 6$ this complexity is not less than 40. Earlier, this result was obtained Cherukhin with use of computer calculations [1]. Given a simplified proof of the lower bound, published at [2]: for even $n \neq 2^k$ the complexity is not less than $n^2 + 2$, for odd $n \geq 5$ the complexity is not less than $n^2 + 3$.
Keywords: lower bounds on the formula complexity, formulas, π-schemes.

1. Введение

Рассматривается задача о сложности реализации линейной булевой функции (эту функцию называют также счётчиком чётности)

$$\varphi(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 + ... + x_n = 1 \pmod 2, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

в классе формул в базисе $\{\vee, \wedge, ^-\}$. Под сложностью λ_n линейной булевой функции $\varphi(x_1, ..., x_n)$ понимается минимальное число вхождений переменных в формулы, реализующие $\varphi(x_1, ..., x_n)$.

Для чисел λ_n известна следующая верхняя оценка Яблонского [3]:

$$\lambda_n \leq n^2 + (n - 2^{\lfloor \log n \rfloor}) - 2(n - 2^{\lfloor \log n \rfloor})^2. \tag{1}$$

Отметим, что при $n = 2^k,\ k = 0, 1, 2, ...$ справедливо равенство

$$n^2 + (n - 2^{\lfloor \log n \rfloor}) - 2(n - 2^{\lfloor \log n \rfloor})^2 = n^2;$$

Rychkov, K.L., Lower bounds on the formula complexity of a linear Boolean function.

Поступила 30 января 2014 г., опубликована 2 марта 2014 г.

при произвольных целых положительных значениях n справедливы неравенства

$$n^2 \leq n^2 + (n - 2^{\lfloor \log n \rfloor}) - 2(n - 2^{\lfloor \log n \rfloor})^2 < \frac{9}{8} n^2.$$

Известна также нижняя оценка Храпченко [4]:

$$\lambda_n \geq n^2. \tag{2}$$

Неравенства (1) и (2) дают точные значения чисел λ_n в случае, если n - степень двойки: $\lambda_n = n^2$.

Нижняя оценка Храпченко следующим образом была улучшена в [2]:

$$\lambda_n \geq \begin{cases} n^2 + 2 & \text{для чётных } n \neq 2^k \ , \\ n^2 + 3 & \text{для нечётных } n \geq 5 \ . \end{cases} \tag{3}$$

Неравенства (1)-(3) и достаточно простое неравенство $\lambda_3 \geq 10$ дают точные значения чисел λ_n для всех $1 \leq n \leq 8$, кроме $n = 6$. В случае $n = 6$ неравенства (1) и (3) дают

$$38 \leq \lambda_6 \leq 40.$$

В [1] Черухиным была доказана следующая нижняя оценка:

$$\lambda_6 \geq 40. \tag{4}$$

Таким образом, установлено точное значение числа λ_n и в случае $n = 6$.

Доказательство Черухина нижней оценки (4) имеет один "недостаток". Поясним в чём он состоит. Это доказательство можно разбить на две части.

В первой части при помощи метода "забивания переменных"Субботовской показано, что неравенство

$$\lambda_6 \geq 40$$

является следствием двух неравенств

$$\lambda_5 \geq 28, \quad \lambda_6 \geq 38$$

(эти неравенства представляют собой частный случай нижней оценки (3)) и следующего утверждения (далее будем называть его утверждением Черухина): в каждую формулу длины 28 (длина формулы это число вхождений переменных в неё), вычисляющую счётчик чётности 5 переменных, хотя бы одна из переменных входит не менее 8 раз. Ниже эти рассуждения воспроизведены без изменения (Теорема 1).

Во второй части устанавлена справедливость утверждения Черухина.

"Недостаток"доказательства заключается в том, что вторая его часть опирается на компьютерный перебор.

В настоящей статье в первом параграфе утверждение Черухина доказывается без использования компьютерного перебора, во втором параграфе даётся упрощённое доказательство нижней оценки (3).

Доказательство утверждения Черухина и нижней оценки (3) излагается на языке π-схем. Это связано прежде всего с тем, что в основе этих доказательств лежит метод В. М. Храпченко получения нижних оценок сложности π-схем [4]. Кроме того, язык π-схем представляется более наглядным.

2. Доказательство нижней оценки сложности $\lambda_6 \geq 40$

Следующая теорема была сформулирована и доказана Черухиным в статье [1]. Здесь это доказательство воспроизводится без изменений.

Теорема 1. Если в каждую формулу длины 28, вычисляющую счётчик чётности 5 переменных, хотя бы одна из переменных входит не менее 8 раз, то $\lambda_6 \geq 40$.

Доказательство. Рассмотрим формулу длины λ_6 для счётчика чётности 6 переменных. Выберем в ней переменную, входящую наибольшее число раз. Пусть это число равно k. В силу оценки Рычкова, $\lambda_6 \geq 38$. Поэтому $k \geq \lceil 38/6 \rceil = 7$. Используя метод "забивания переменных"Субботовской [5], подставим вместо этой переменной такую константу, что длина формулы уменьшится как минимум на $k + \lceil k/2 \rceil$. При этом получится формула для счётчика чётности 5 переменных или для его отрицания (в последнем случае навесим на формулу отрицание и спустим его на переменные). Имеем

$$\lambda_6 - (k + \lceil k/2 \rceil) \geq \lambda_5 = 28.$$

Если $k \geq 8$, то из этого соотношения следует $\lambda_6 \geq 40$. Если же $k = 7$, то из этого соотношения следует $\lambda_6 \geq 39$. При этом, если допустить, что $\lambda_6 = 39$, то после подстановки константы получится формула длины 28, в которую каждая переменная входит $\leq k = 7$ раз, что противоречит нашему предположению. Таким образом, $\lambda_6 \geq 40$.
Теорема 1 доказана.

Теперь приступим к доказательству утверждения Черухина. Через B^n обозначим множество вершин n-мерного единичного куба. Пусть $0 \leq k < n$; $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_{n-k} \leq n$; $\delta_1, ..., \delta_{n-k} \in \{0,1\}$. Множество

$$X^{\delta_1,\ldots,\delta_{n-k}}_{i_1,\ldots,i_{n-k}} = \{\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n \ \mid \ \alpha_{i_1} = \delta_1, \ldots, \alpha_{i_{n-k}} = \delta_{n-k}\ \}$$

называется k-мерной гранью куба B^n; n-мерной гранью куба B^n называется единственное множество — сам куб B^n.

Через $(B^n)_k$ обозначим множество всех k-мерных граней куба B^n.

Множество $I(F) = \{i_1, \ldots, i_{n-k}\}$ называется множеством направляющих, множество $J(F) = \{j_1, \ldots, j_k\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_{n-k}\}$ — множеством образующих грани $F = X^{\delta_1,\ldots,\delta_{n-k}}_{i_1,\ldots,i_{n-k}}$.

Через $\rho(\alpha, \beta)$ обозначим расстояние Хэммминга между вершинами $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ куба B^n.

Пусть

$$N_0 = \varphi^{-1}(0), \qquad N_1 = \varphi^{-1}(1).$$

Отметим, что $N_0 \cup N_1 = B^n$. Элементы множества $N_0 \times N_1$ называются (0-1)-парами функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Подмножество M множества $N_0 \times N_1$ назовём замкнутым, если найдутся такие $A_0 \subseteq N_0$ и $A_1 \subseteq N_1$, что $M = A_0 \times A_1$.

Для произвольного множества $M \subseteq N_0 \times N_1$ через $\widehat{M}$ обозначим минимальное по включению замкнутое подмножество множества $N_0 \times N_1$, содержащее M.

Введём следующие обозначения:

$$R = \{(\alpha,\beta) \in N_0 \times N_1 \mid \rho(\alpha,\beta) = 1\},$$

$$R_i = \{(\alpha,\beta) \in R \mid \alpha_i \neq \beta_i\}, \quad i = 1,\dots,n,$$

$$R_i^0 = R_i \cap (X_i^1 \times X_i^0), \quad R_i^1 = R_i \cap (X_i^0 \times X_i^1), \quad i = 1,\dots,n.$$

Элементы множества R называются (0-1)-рёбрами функции $\varphi(x_1,\dots,x_n)$. Элементы множеств R_i, R_i^0 и R_i^1, $i = 1,\dots,n$, - соответственно (0-1) рёбрами направления i, нечётными и чётными (0-1)-рёбрами направления i.

Далее нам будет удобно отождествлять произвольное (0-1)-ребро $(\alpha,\beta) \in R$ булевой функции $\varphi(x_1,...,x_n)$ с одномерной гранью $\{\alpha,\beta\}$ куба B^n. Очевидно, если $(\alpha,\beta) \in R_i$, то $I(\{\alpha,\beta\}) = \{1,...,n\} \setminus \{i\}$, $J(\{\alpha,\beta\}) = \{i\}$. Следовательно, в этом случае справедливо равенство $\{\alpha,\beta\} = X^{\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n}_{1,\dots,i-1,\ i+1,\dots,n}$. Используя это равенство, для каждого $i = 1,...,n$ определим расстояние d между элементами множества R_i. Пусть $r_1, r_2 \in R_i$, $r_1 = X^{\delta_1,\dots,\delta_{i-1},\delta_{i+1},\dots,\delta_n}_{1,\dots,i-1,\ i+1,\dots,n}$, $r_2 = X^{\sigma_1,\dots,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\dots,\sigma_n}_{1,\dots,i-1,\ i+1,\dots,n}$, тогда по определению $d(r_1,r_2)$ равно расстоянию Хэмминга между наборами $(\delta_1,...,\delta_{i-1},\delta_{i+1},...,\delta_n)$ и $(\sigma_1,...,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},...,\sigma_n)$.

Если набор $(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},...,\alpha_n)$ чётный, т. е. $\sum\limits_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}} \alpha_j = 0 \pmod 2$, то грань $X^{\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n}_{1,\dots,i-1,\ i+1,\dots,n}$ называем чётной. В противном случае эту грань называем нечётной.

Отметим, если $(\alpha,\beta) \in R_i^0$ (т. е. $\alpha \in N_0$ и $\alpha_i = 1$), то грань $\{\alpha,\beta\}$ является нечётной. В случае $(\alpha,\beta) \in R_i^1$ грань $\{\alpha,\beta\}$ является чётной.

Для произвольной грани F куба B^n введём следующие обозначения:

$$N_0(F) = N_0 \cap F, \quad N_1(F) = N_1 \cap F,$$

$$R_i^0(F) = R_i^0 \cap (N_0(F) \times N_1(F)), \quad i = 1,...,n,$$

$$R_i^1(F) = R_i^1 \cap (N_0(F) \times N_1(F)), \quad i = 1,...,n.$$

Лемма 1. Пусть $F \in (B^n)_k$ и $2 \le k \le n$. Тогда справедливы равенства

$$|R_i^0(F)| = |R_i^1(F)| = 0 \quad \text{при} \quad i \in I(F),$$

$$|R_i^0(F)| = |R_i^1(F)| = 2^{k-2} \quad \text{при} \quad i \in J(F).$$

Доказательство. Очевидно.

Лемма 2. Пусть $F \in (B^n)_k;\ i,j \in J(F);\ \delta,\sigma \in \{0,1\}$. Если $i \neq j$ и $k \ge 3$, то справедливо равенство

$$|\widehat{R_i^\delta(F)} \cap \widehat{R_j^\sigma(F)}| = (2^{k-3})^2.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную грань $F \in (B^n)_k$, и пусть $i \in J(F)$. Из определений множеств R_i, $R_i^0(F)$ и $R_i^1(F)$ очевидным образом вытекают равенства

$$R_i^0(F) = R_i \ \cap \ ((X_i^1 \cap N_0(F)) \times (X_i^0 \cap N_1(F))),$$

$$R_i^1(F) = R_i \ \cap \ ((X_i^0 \cap N_0(F)) \times (X_i^1 \cap N_1(F))).$$

Поскольку для каждого $\alpha \in X_i^1 \cap N_0(F)$ существует $\beta \in X_i^0 \cap N_1(F)$ такое, что $(\alpha,\beta) \in R_i$, и для каждого $\beta \in X_i^0 \cap N_1(F)$ существует $\alpha \in X_i^1 \cap N_0(F)$ такое, что $(\alpha,\beta) \in R_i$, имеем

$$\widehat{R_i^0(F)} = (X_i^1 \cap N_0(F)) \times (X_i^0 \cap N_1(F)).$$

Точно также справедливо равенство

$$\widehat{R_i^1(F)} = (X_i^0 \cap N_0(F)) \times (X_i^1 \cap N_1(F)).$$

Из этих равенств следует, что при $i, j \in J(F);\ \delta, \sigma \in \{0,1\}$

$$\widehat{R_i^\delta(F)} \cap \widehat{R_j^\sigma(F)} = (N_0(F) \cap X_i^{\delta\oplus 1} \cap X_j^{\sigma\oplus 1}) \times (N_1(F) \cap X_i^\delta \cap X_j^\sigma).$$

Утверждение леммы следует из следующих простых равенств, которые справедливы при $i, j \in J(F),\ i \neq j,\ k \geq 3$:

$$|N_0(F) \cap X_i^{\delta\oplus 1} \cap X_j^{\sigma\oplus 1}| = |N_1(F) \cap X_i^\delta \cap X_j^\sigma| = 2^{k-3}.$$

Лемма 2 доказана.

Введём обозначения. Для произвольного множества M через $[M]_2$ обозначается множество всех 2-элементных подмножеств этого множества.

Для каждого $i = 1, ..., n$ и произвольного непустого множества $M \subseteq R_i$ через $\langle M \rangle$ обозначим минимальную по включению грань куба B^n, содержащую все (0-1)-рёбра из M.

Рассмотрим $2n$ множеств $[R_i^\delta]_2,\ i = 1, \ldots, n,\ \delta = 0, 1$. Каждое из этих множеств будем называть графом, имея в виду полный граф с множеством вершин R_i^δ и множеством рёбер $[R_i^\delta]_2$. Более того, каждый из этих графов будем считать графом с помеченными рёбрами: подразумевается, что каждому ребру $e \in [R_i^\delta]_2$ в качестве метки приписана грань $\langle e \rangle$ куба B^n. Нас будет интересовать множество

$$\mathfrak{R} = \bigcup_{i=1}^n [R_i^0]_2 \ \cup\ \bigcup_{i=1}^n [R_i^1]_2,$$

которое мы также будем называть графом, имея в виду объединение указанных выше полных помеченных графов.

Лемма 3. Пусть $e = \{r_1, r_2\} \in \mathfrak{R}$. Тогда из равенства $d(r_1, r_2) = k$ следует включение $\langle e \rangle \in (B^n)_{k+1}$.

Доказательство. Пусть $i \in \{1, ..., n\}$. Рассмотрим произвольное ребро $e = \{r_1, r_2\} \in [R_i^0]_2 \cup [R_i^1]_2$ и пусть $r_1 = X_{1,\ldots,i-1,\ i+1,\ldots,n}^{\delta_1,\ldots,\delta_{i-1},\delta_{i+1},\ldots,\delta_n}$, $r_2 = X_{1,\ldots,i-1,\ i+1,\ldots,n}^{\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n}$, $F = \langle e \rangle$.

Ясно, что $J(F) = \{j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i\} \mid \delta_j \neq \sigma_j\} \cup \{i\}$. Поэтому $|J(F)| = d(r_1, r_2) + 1 = k + 1$, следовательно $\langle e \rangle \in (B^n)_{k+1}$.
Лемма 3 доказана.

Заметим, если $F \in (B^n)_3$, то каждое из шести множеств $R_j^\delta(F),\ j \in J(F),\ \delta \in \{0, 1\}$, имеет мощность 2 и поэтому является ребром графа $\mathfrak{R}$.

Лемма 4. Для каждого $F \in (B^n)_3$ среди рёбер графа $\mathfrak{R}$ шесть рёбер $R_j^\delta(F),\ j \in J(F),\ \delta \in \{0, 1\}$, и только они имеют метку F.

Доказательство. Рассмотрим произвольную грань $F \in (B^n)_3$. Равенства $\langle R_j^\delta(F) \rangle = F,\ j \in J(F),\ \delta \in \{0, 1\}$ очевидны. С другой стороны, если для некоторого $e \in \mathfrak{R}$ выполнено $\langle e \rangle = F$, то найдутся такие $j \in J(F),\ \delta \in \{0, 1\}$, что $e \subseteq R_j^\delta(F)$. Учитывая равенство $|e| = |R_j^\delta(F)| = 2$, имеем $e = R_j^\delta(F)$.
Лемма 4 доказана.

Пусть $e = \{r_1, r_2\} \in [R_i^0]_2,\ i \in \{1, ..., n\}$ и $d(r_1, r_2) = 2$. Через e^* обозначим такое $u \in [R_i^1]_2$, что $\langle u \rangle = \langle e \rangle$ (в силу лемм 3, 4 такое u существует и единственно).

Точно также пусть $e = \{r_1, r_2\} \in [R_i^1]_2,\ i \in \{1, ..., n\}$ и $d(r_1, r_2) = 2$. Через e^* обозначим такое $u \in [R_i^0]_2$, что $\langle u \rangle = \langle e \rangle$ (в силу лемм 3, 4 такое u существует и единственно).

Отметим, что из этих определений следует равенство $e^{**} = e$.

Лемма 5. Пусть $e = \{r_1, r_2\} \in [R_i^1]_2,\ i \in \{1, ..., n\}$ и $d(r_1, r_2) = 2$. Тогда справедливо равенство $e^* = \{a \in R_i^0 \mid d(a, r_1) = d(a, r_2) = 1\}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное ребро $e = \{r_1, r_2\} \in [R_i^1]_2$ такое, что $d(r_1, r_2) = 2$. Пусть $F = \langle e \rangle$. Из леммы 3 следует $F \in (B^n)_3$. Из леммы 4 следует $e = R_i^1(F),\ e^* = R_i^0(F)$. Поэтому утверждение леммы является следствием очевидного равенства $R_i^0(F) = \{a \in R_i^0 \mid d(a, r_1) = d(a, r_2) = 1\}$.
Лемма 5 доказана.

Пусть $i \in \{1, ..., n\}$. Подмножество Δ мощности 3 множества R_i^1 будем называть треугольником. Треугольник $\Delta = \{r_1, r_2, r_3\}$ будем называть равносторонним с длиной стороны 2, если выполнены равенства $d(r_1, r_2) = d(r_2, r_3) = d(r_3, r_1) = 2$.

Лемма 6. Пусть $i \in \{1, ..., n\}$. Для любого равностороннего треугольника $\Delta = \{r_1, r_2, r_3\} \subseteq R_i^1$ с длиной стороны 2 справедливы следующие соотношения:

1. $\langle \Delta \rangle \in (B^n)_4$,
2. $\{r_1, r_2\}^* \cap \{r_2, r_3\}^* \cap \{r_3, r_1\}^* \neq \emptyset$,
3. $\{r_1, r_2\}^* \cup \{r_2, r_3\}^* \cup \{r_3, r_1\}^* = R_i^0(\langle \Delta \rangle)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный равносторонний треугольник $\Delta = \{r_1, r_2, r_3\} \subseteq R_i^1$ с длиной стороны 2. Пусть $F = \langle \Delta \rangle$ и

$$r_1 = X^{\delta_1, ..., \delta_{i-1}, \delta_{i+1}, ..., \delta_n}_{1, ..., i-1,\ i+1, ..., n}, \quad r_2 = X^{\sigma_1, ..., \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, ..., \sigma_n}_{1, ..., i-1,\ i+1, ..., n}, \quad r_3 = X^{\lambda_1, ..., \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, ..., \lambda_n}_{1, ..., i-1,\ i+1, ..., n}.$$

Рассмотрим множества

$$I_1 = \{j \in \{1, ..., i-1, i+1, ..., n\} \mid \delta_j \neq \sigma_j\},$$
$$I_2 = \{j \in \{1, ..., i-1, i+1, ..., n\} \mid \sigma_j \neq \lambda_j\},$$
$$I_3 = \{j \in \{1, ..., i-1, i+1, ..., n\} \mid \lambda_j \neq \delta_j\}.$$

Ясно, что $J(F) = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \{i\}$ и

$$|I_1| = d(r_1, r_2) = 2, \quad |I_2| = d(r_2, r_3) = 2, \quad |I_3| = d(r_3, r_1) = 2.$$

Непосредственно из определений множеств $I_1,\ I_2,\ I_3$ вытекают равенства

$$I_1 = (I_2 \cup I_3) \setminus (I_2 \cap I_3), \qquad I_2 = (I_3 \cup I_1) \setminus (I_3 \cap I_1), \qquad I_3 = (I_1 \cup I_2) \setminus (I_1 \cap I_2),$$
$$I_1 \cap I_2 \cap I_3 = \emptyset.$$

Простым следствием этих равенств являются равенства

$$|I_1 \cap I_2| = |I_2 \cap I_3| = |I_3 \cap I_1| = 1, \qquad |I_1 \cap I_2 \cap I_3| = 0.$$

Поэтому

$$|I_1 \cup I_2 \cup I_3| = |I_1| + |I_2| + |I_3| - |I_1 \cap I_2| - |I_2 \cap I_3| - |I_3 \cap I_1| + |I_1 \cap I_2 \cap I_3| = 3.$$

Следовательно $|J(F)| = 4$ и значит $\langle \Delta \rangle \in (B^n)_4$. Первое соотношение доказано.

Пусть $I_1 \cap I_2 = \{q\}$. Рассмотрим набор $(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$, определённый равенствами $\alpha_j = \sigma_j,\ j \in \{1, ..., i-1, i+1, ..., n\} \setminus \{q\};\quad \alpha_q = \sigma_q \oplus 1$. Пусть

$$a_0 = X^{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n}_{1, \ldots, i-1,\ i+1, \ldots, n}.$$

Ясно, что $a_0 \in R_i^0$ и $d(a_0, r_1) = d(a_0, r_2) = d(a_0, r_3) = 1$. В силу леммы 5 справедливы включения $a_0 \in \{r_1, r_2\}^*,\ a_0 \in \{r_2, r_3\}^*,\ a_0 \in \{r_3, r_1\}^*$. Второе соотношение доказано.

Через $a_1,\ a_2,\ a_3$ обозначим такие (0-1)-рёбра из множества R_i^0, что

$$\{a_0, a_1\} = \{r_1, r_2\}^*, \quad \{a_0, a_2\} = \{r_2, r_3\}^*, \quad \{a_0, a_3\} = \{r_3, r_1\}^*.$$

Ясно, что

$$\{r_1, r_2\}^* \cup \{r_2, r_3\}^* \cup \{r_3, r_1\}^* = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}.$$

Множества $\{r_1, r_2\},\ \{r_2, r_3\},\ \{r_3, r_1\}$ являются попарно различными. В силу равенства $e^{**} = e$ множества $\{r_1, r_2\}^*,\ \{r_2, r_3\}^*,\ \{r_3, r_1\}^*$ также являются попарно различными. Поэтому справедливо равенство

$$|\{a_0, a_1, a_2, a_3\}| = 4.$$

Из очевидных включений $\langle\{r_1, r_2\}\rangle,\ \langle\{r_2, r_3\}\rangle,\ \langle\{r_3, r_1\}\rangle \subseteq \langle\{r_1, r_2, r_3\}\rangle$ следуют включения $\langle\{a_0, a_1\}\rangle,\ \langle\{a_0, a_2\}\rangle,\ \langle\{a_0, a_3\}\rangle \subseteq F$. Поэтому справедливо включение

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3\} \subseteq R_i^0(F).$$

Поскольку $F \in (B^n)_4$ и $i \in J(F)$ из леммы 1 следует $|R_i^0(F)| = 4$. Поэтому справедливо равенство

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3\} = R_i^0(F).$$

Третье соотношение доказано.
Лемма 6 доказана.

Все дальнейшие рассуждения связаны с методом Храпченко получения нижних оценок сложности π-схем [4], поэтому мы переходим с языка формул на язык π-схем. В силу того, что π-схема фактически является "изображением"соответствующей формулы в виде графа, эти два языка можно считать равноценными. Заметим, что метод Храпченко можно излагать и на языке формул. Однако язык π-схем в данном случае представляется более удобным и наглядным.

Сложность π-схемы S, т. е. число контактов в ней обозначается $L(S)$. Сложность булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в классе π-схем, т. е. сложность минимальной π-схемы для этой функции, обозначается $L_\pi(f(x_1, \ldots, x_n))$.

Заметим, что для любого $n \geq 1$ справедливо равенство $\lambda_n = L_\pi(\varphi(x_1, \ldots, x_n))$.

Через $K(S)$ обозначим множество всех контактов π-схемы S, через $K_i^\delta(S)$ - множество контактов, помеченных литералом $x_i^\delta,\ i = 1, \ldots, n;\ \delta = 0, 1$. Здесь, как обычно

$$x_i^\delta = \begin{cases} x_i, & \text{если } \delta = 1, \\ \overline{x_i}, & \text{если } \delta = 0. \end{cases}$$

Если контакт $k \in K(S)$ помечен x_i или $\overline{x_i}$, то говорят, что переменная x_i управляет контактом k.

Матрицу

$$\mathfrak{L}(S) = \begin{pmatrix} l_1^0 & \cdots & l_n^0 \\ l_1^1 & \cdots & l_n^1 \end{pmatrix},$$

где $l_i^0 = |K_i^0(S)|$, $l_i^1 = |K_i^1(S)|$, $i = 1, \dots, n$ назовём матрицей сложности π-схемы S.

Очевидно, справедливо равенство $L(S) = \sum\limits_{i,\delta} l_i^\delta$.

Доказательство утверждения Черухина и нижней оценки (3) опирается на анализ некоторого специального отображения (0-1)-рёбер функции $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ в контакты π-схемы S, реализующей эту функцию. Это отображение впервые было обнаружено и исследовано Валерием Михайловичем Храпченко в статье [4]. Мы будем обозначать его

$$h : R \to K(S).$$

и называть отображением Храпченко для функции $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ и π-схемы S.

Отображение Храпченко для функции $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ и π-схемы S строится по следующим правилам.

Цепью π-схемы S называется простая (без самопересечений) цепь в S, соединяющая полюсы схемы. Тупиковым сечением π-схемы S называется минимальное по включению множество контактов этой схемы, имеющее общий контакт с каждой цепью схемы. Говорят, что контакт $k \in K(S)$, помеченный x_i^δ, замкнут (соответственно разомкнут) на наборе $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ значений переменных функции $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, если $\alpha_i^\delta = 1$ (соответственно $\alpha_i^\delta = 0$).

Каждому набору $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in N_1$ поставим в соответствие какую-нибудь одну цепь π-схемы S, все контакты которой замкнуты на наборе $(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Поскольку $\varphi(\beta_1, \dots, \beta_n) = 1$ такая цепь обязательно найдётся.

Каждому набору $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in N_0$ поставим в соответствие какое-нибудь одно тупиковое сечение π-схемы S, все контакты которого разамкнуты на наборе $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Поскольку $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$, каждая цепь π-схемы S содержит контакт, разамкнутый на наборе $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Поэтому такое тупиковое сечение обязательно найдётся.

Определение отображения Храпченко основано на следующем свойстве π-схем: каждая цепь и каждое тупиковое сечение любой π-схемы имеют ровно один общий контакт. Это свойство легко доказывается индукцией по сложности π-схемы [4, 6].

По определению отображение Храпченко $h : R \to K(S)$ каждому (0-1)-ребру $(\alpha, \beta) \in R$ ставит в соответствие тот единственный контакт, который является общим для тупикового сечения, соответствующего $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, и цепи, соответствующей $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$.

Лемма 7. Отображение Храпченко $h : R \to K(S)$ для функции $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ и произвольной реализующей эту функцию π-схемы S обладает следующими свойствами:

1. для каждого $k \in K_i^\delta(S)$, $i = 1, \dots, n$, $\delta = 0, 1$, справедливо включение $h^{-1}(k) \subseteq R_i^\delta$;
2. множества $\widehat{h^{-1}(k)}$, $k \in K(S)$, попарно не пересекаются.

Доказательство. Рассмотрим отображение Храпченко $h : R \to K(S)$. Правила, с помощью которых мы задали это отображение, позволяют естественным образом расширить его область определения с множества R до множества $N_0 \times N_1$.

Через $H : N_0 \times N_1 \to K(S)$ обозначим отображение, которое каждой (0-1)-паре $(\alpha, \beta) \in N_0 \times N_1$ ставит в соответствие контакт $k \in K(S)$, общий для тупикового сечения, соответствующего α, и цепи, соответствующей β.

Для каждого $k \in K(S)$ через $A_0(k)$ обозначим множество таких $\alpha \in N_0$, что соответствующие этим α тупиковые сечения содержат k. Точно также через $A_1(k)$ обозначим множество таких $\beta \in N_1$, что соответствующие этим β цепи содержат k.

Ясно, что $H^{-1}(k) = A_0(k) \times A_1(k)$. Из этого равенства следует $\widehat{H^{-1}(k)} = H^{-1}(k)$. Поэтому из включения $h^{-1}(k) \subseteq H^{-1}(k)$ следует $\widehat{h^{-1}(k)} \subseteq \widehat{H^{-1}(k)} \subseteq H^{-1}(k)$. Таким образом, второе свойство отображения h выполнено в силу того, что множества $H^{-1}(k),\ k \in K(S)$, попарно не пересекаются.

Докажем справедливость первого свойства отображения h. Пусть $k \in K_i^\delta(S)$. Из определения множества $A_0(k)$ следует, что контакт k разомкнут на каждом наборе $\alpha \in A_0(k)$. Поэтому $A_0(k) \subseteq X_i^{\delta\oplus 1}$. Точно также из определения множества $A_1(k)$ следует, что контакт k замкнут на каждом наборе $\beta \in A_1(k)$. Поэтому $A_1(k) \subseteq X_i^\delta$. Таким образом, имеем $h^{-1}(k) \subseteq H^{-1}(k) \cap R \subseteq (X_i^{\delta\oplus 1} \times X_i^\delta) \cap R = R_i^\delta$.
Лемма 7 доказана.

Далее сформулированные в лемме 7 свойства отображения Храпченко будем называть соответственно первым и вторым свойством отображения h.

Следующая теорема была сформулирована Черухиным в статье [1] и доказана с использованием компьютерного перебора. Здесь приводится доказательство, опирающееся на анализ отображения Храпченко.

Теорема 2 (утверждение Черухина).

В каждой π-схеме сложности 28 , вычисляющей счётчик чётности 5 переменных, хотя бы одна из переменных управляет не менее чем 8 контактами.

Доказательство. Рассмотрим произвольную π-схему S сложности 28 , вычисляющую булеву функцию $\varphi(x_1, ..., x_5)$. Пусть $h : R \to K(S)$ – отображение Храпченко для функции $\varphi(x_1, ..., x_5)$ и π-схемы S. С помощью этого отображения сопоставим π-схеме S некоторый подграф $\mathfrak{G}$ графа $\mathfrak{R}$.

Пусть

$$G_i^0 = \bigcup_{k \in K_i^0(S)} [h^{-1}(k)]_2, \quad G_i^1 = \bigcup_{k \in K_i^1(S)} [h^{-1}(k)]_2, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Заметим, в силу первого свойства отображения h имеют место включения

$$G_i^0 \subseteq [R_i^0]_2, \qquad G_i^1 \subseteq [R_i^1]_2, \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Пусть

$$(G_i^0)^* = \{e^* \mid e = \{r_1, r_2\} \in G_i^0,\ d(r_1, r_2) = 2\}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Очевидно, имеют место включения

$$(G_i^0)^* \subseteq [R_i^1]_2, \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Пусть

$$\widetilde{G_i^1} = G_i^1 \backslash (G_i^0)^*, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Подграф $\mathfrak{G}$ графа $\mathfrak{R}$ определим следующим образом:

$$\mathfrak{G} = \bigcup_{i=1}^{5} G_i^0 \cup \bigcup_{i=1}^{5} \widetilde{G_i^1}.$$

Заметим, из определения графа $\mathfrak{G}$ следует $|\mathfrak{G}| = \sum\limits_{i=1}^{5} |G_i^0| + \sum\limits_{i=1}^{5} |\widetilde{G_i^1}|$.

Лемма 8. Для любого $F \in (B^5)_3$ в графе $\mathfrak{G}$ имеется не более чем одно ребро, помеченное F.

Доказательство. Предположим противное. Пусть для некоторой грани $F \in (B^5)_3$ существуют два различных ребра $e_1,\ e_2$ графа $\mathfrak{G}$ такие, что $\langle e_1 \rangle = \langle e_2 \rangle = F$. Через $k_1,\ k_2$ обозначим такие контакты из $K(S)$, для которых выполнены включения $e_1 \in [h^{-1}(k_1)]_2,\ e_2 \in [h^{-1}(k_2)]_2$. Покажем, что вопреки второму свойству отображения h справедливы соотношения $k_1 \neq k_2,\ \widehat{h^{-1}(k_1)} \cap \widehat{h^{-1}(k_2)} \neq \emptyset$.

В силу леммы 4 найдутся такие $i,\ j \in J(F),\quad \delta,\ \sigma \in \{0,1\}$, что $e_1 = R_i^\delta(F)$, $e_2 = R_j^\sigma(F)$. Из $e_1 \neq e_2$ следует $(i,\delta) \neq (j,\sigma)$. Из определения графа $\mathfrak{G}$ следует, что рёбра e_1^* и e_2^* не принадлежат этому графу. Поэтому $e_1 \neq e_2^*$ и значит $i \neq j$. Следовательно в силу леммы 2 справедливо равенство $|\widehat{e_1} \cap \widehat{e_2}| = 1$. Из включений $\widehat{e_1} \subseteq \widehat{h^{-1}(k_1)}$, $\widehat{e_2} \subseteq \widehat{h^{-1}(k_2)}$ следует $\widehat{h^{-1}(k_1)} \cap \widehat{h^{-1}(k_2)} \neq \emptyset$.

Докажем, что $k_1 \neq k_2$. Из включений $e_1 = R_i^\delta(F) \subseteq h^{-1}(k_1),\ e_1 = R_j^\sigma(F) \subseteq h^{-1}(k_2)$ и первого свойства отображения h следуют включения $h^{-1}(k_1) \subseteq R_i^\delta,\ h^{-1}(k_2) \subseteq R_j^\sigma$, а значит и включения $k_1 \in K_i^\delta(S)$, $k_2 \in K_j^\sigma(S)$. Из $(i,\delta) \neq (j,\sigma)$ следует $k_1 \neq k_2$.
Лемма 8 доказана.

Лемма 9. В графе $\mathfrak{G}$ имеется не более восьми рёбер, помеченных B^5.

Доказательство. Предположим противное. Пусть для грани B^5 существуют 9 различных рёбер $e_1, \ldots, e_9$ графа $\mathfrak{G}$, для которых выполнены равенства $\langle e_1 \rangle = \ldots = \langle e_9 \rangle = B^5$. Через $k_1, \ldots, k_9$ обозначим такие контакты из $K(S)$, что выполнены включения $e_1 \in [h^{-1}(k_1)]_2, \ldots, e_9 \in [h^{-1}(k_9)]_2$. Покажем, что вопреки второму свойству отображения h среди контактов $k_1, \ldots, k_9$ найдутся такие два $k_p,\ k_q$, для которых выполнены соотношения $k_p \neq k_q$, $\widehat{h^{-1}(k_p)} \cap \widehat{h^{-1}(k_q)} \neq \emptyset$.

Рассмотрим произвольное $e = \{r, r'\} \in \{e_1, \ldots, e_9\}$. Ясно, что множество $\widehat{e}$ состоит из 4 элементов: двух (0-1)-рёбер $r = (\alpha, \beta),\ r' = (\alpha', \beta')$ и двух (0-1)-пар $(\alpha, \beta'),\ (\alpha', \beta)$. Из леммы 3 и равенства $\langle e \rangle = B^5$ следует $d(r, r') = 4$. Поэтому справедливы равенства $\rho(\alpha, \beta') = \rho(\alpha', \beta) = 5$. Пусть

$$D = \{(\alpha, \beta) \in N_0(B^5) \times N_1(B^5) \mid \rho(\alpha, \beta) = 5\}.$$

Ясно, что $|D| = 16$. Поэтому из равенств $|\widehat{e_1} \cap D| = \ldots = |\widehat{e_9} \cap D| = 2$ следует, что среди рёбер $e_1, \ldots, e_9$ найдутся два различных ребра $e_p,\ e_q$, для которых справедливо $\widehat{e_p} \cap \widehat{e_q} \cap D \neq \emptyset$. Из включений $\widehat{e_p} \subseteq \widehat{h^{-1}(k_p)}$, $\widehat{e_q} \subseteq \widehat{h^{-1}(k_q)}$ следует $\widehat{h^{-1}(k_p)} \cap \widehat{h^{-1}(k_q)} \neq \emptyset$.

Докажем, что $k_p \neq k_q$. Пусть $i,\ j \in \{1,2,3,4,5\},\quad \delta,\ \sigma \in \{0,1\}$ такие, что $e_p \in [R_i^\delta]_2$, $e_q \in [R_j^\sigma]_2$. Если $(i,\delta) = (j,\sigma)$, то выполнено включение $e_p,\ e_q \subseteq R_i^\delta$. В этом случае соотношение $\widehat{e_p} \cap \widehat{e_q} \cap D \neq \emptyset$ возможно только тогда, когда $e_p = e_q$. Поскольку $e_p \neq e_q$, имеет место $(i,\delta) \neq (j,\sigma)$ Из включений $e_p \subseteq h^{-1}(k_p),\ e_q \subseteq h^{-1}(k_q)$ и первого свойства отображения h следуют включения $h^{-1}(k_q) \subseteq R_i^\delta,\ h^{-1}(k_q) \subseteq R_j^\sigma$, а значит и включения $k_p \in K_i^\delta(S)$, $k_q \in K_j^\sigma(S)$. Из $(i,\delta) \neq (j,\sigma)$ следует $k_p \neq k_q$.
Лемма 9 доказана.

Лемма 10. Справедливо неравенство

$$|\mathfrak{G}| \leq 48.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное ребро $e = \{r_1, r_2\}$ графа $\mathfrak{G}$. Из включения $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{R}$ следует, что (0-1)-рёбра $r_1,\ r_2$ имеют одинаковую чётность и значит либо $d(r_1, r_2) = 2$ либо $d(r_1, r_2) = 4$. Следовательно, для $\langle e \rangle$ выполнено одно из двух соотношений: либо $\langle e \rangle \in (B^5)_3$ либо $\langle e \rangle = B^5$. Учитывая равенства $|(B^5)_3| = 40$ и $|(B^5)_5| = 1$, как следствие лемм 8, 9 имеем

$$|\mathfrak{G}| \leq |(B^5)_3| + 8|(B^5)_5| \leq 48.$$

Лемма 10 доказана.

Чтобы не использовать громоздкие индексы для элементов матрицы сложности

$$\mathfrak{L}(S) = \begin{pmatrix} l_1^0 & l_2^0 & l_3^0 & l_4^0 & l_5^0 \\ l_1^1 & l_2^1 & l_3^1 & l_4^1 & l_5^1 \end{pmatrix}$$

π-схемы S без ограничения общности будем считать, что эти элементы удовлетворяют следующим неравенствам:

$$l_1^0 \leq l_1^1, \quad l_2^0 \leq l_2^1, \quad l_3^0 \leq l_3^1, \quad l_4^0 \leq l_4^1, \quad l_5^0 \leq l_5^1,$$

$$l_1^0 \leq l_2^0 \leq l_3^0 \leq l_4^0 \leq l_5^0.$$

Доказательство теоремы 2 проведём от противного. Предположим, каждая из переменных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 управляет не более чем 7 контактами π-схемы S. Из этого предположения вытекает, что все элементы верхней строки матрицы $\mathfrak{L}(S)$ не превосходят 3. Покажем, что из последнего следует противоречащее лемме 10 неравенство

$$|\mathfrak{G}| > 48.$$

Лемма 11. Для каждого $i = 1, 2, 3, 4, 5$ справедливо неравенство

$$|G_i^0| \geq \begin{cases} 28, & \text{если } l_i^0 = 1, \\ 12, & \text{если } l_i^0 = 2, \\ 7, & \text{если } l_i^0 = 3. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Учитывая $G_i^0 = \bigcup\limits_{k \in K_i^0(S)} [h^{-1}(k)]_2$, неравенство Коши-Буняковского $\Big(\sum\limits_{k \in K_i^0(S)} |h^{-1}(k)|\ \Big)^2 \leq |K_i^0(S)| \cdot \sum\limits_{k \in K_i^0(S)} |h^{-1}(k)|^2$ и равенство $\sum\limits_{k \in K_i^0(S)} |h^{-1}(k)| = |R_i^0| = 8$, верное в силу первого свойства отображения h, имеем

$$|G_i^0| = \sum_{k \in K_i^0(S)} \Big|[h^{-1}(k)]_2\Big| = \sum_{k \in K_i^0(S)} \frac{|h^{-1}(k)|(|h^{-1}(k)| - 1)}{2} =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k \in K_i^1(S)} |h^{-1}(k)|^2 - \frac{1}{2} \sum_{k \in K_i^1(S)} |h^{-1}(k)| \geq \frac{|R_i^0|^2}{2|K_i^0(S)|} - \frac{1}{2}|R_i^0| = \frac{32}{l_i^0} - 4.$$

Поэтому, и в силу того, что $|G_i^0|$ - целое число, справедливо неравенство

$$|G_i^0| \geq \lceil 32/l_i^o - 4 \rceil.$$

Утверждение леммы 11 является непосредственным следствием этого неравенства.
Лемма 11 доказана.

Мы говорим, что граф $(G_i^0)^*$ не содержит треугольников, если для любого 3-элементного множества $\Delta \subseteq R_i^1$ выполнено $[\Delta]_2 \not\subseteq (G_i^0)^*$.

Лемма 12. Если элементы верхней строки матрицы $\mathfrak{L}(S)$ не превосходят 3, то графы $(G_i^0)^*,\ i = 1, ..., 5$, не содержат треугольников.

Доказательство. Предположим противное. Пусть для некоторого $q \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ найдётся такой треугольник $\Delta = \{r_1, r_2, r_3\} \subseteq R_q^1$, что $[\Delta]_2 \subseteq (G_q^0)^*$. Из определения графа $(G_q^0)^*$ следует, что Δ является равносторонним треугольником с длиной стороны 2. Грань $\langle\Delta\rangle$ обозначим T. В силу леммы 6 справедливо включение $T \in (B^5)_4$.

Для произвольной грани $F \in (B^5)_4$ пусть

$$E(F) = \{e \in \mathfrak{G} \mid \langle e\rangle \subseteq F\},$$

$$(F)_3 = \{P \in (B^5)_3 \mid P \subseteq F\}.$$

Заметим, если $e = \{r_1, r_2\} \in E(F)$, то $d(r_1, r_2) = 2$. Следовательно $\langle e\rangle \in (F^5)_3$ и значит в силу леммы 8 справедливо неравенство

$$|E(F)| \le |(F^5)_3| = 8.$$

Чтобы прийти к противоречию докажем неравенство

$$|E(T)| > 9.$$

Покажем, что подграф $G_q^0 = \bigcup\limits_{k \in K_q^0(S)} [h^{-1}(k)]_2$ графа $\mathfrak{G}$ содержит 6 рёбер из множества $E(T)$. Рассмотрим три ребра $e_1 = \{r_1, r_2\},\ e_2 = \{r_2, r_3\},\ e_3 = \{r_3, r_1\} \in [\Delta]_2$ графа $(G_q^0)^*$. Из определения $(G_q^0)^*$ следует $e_1^*,\ e_2^*,\ e_3^* \in G_q^0$. Через k_1 обозначим такой контакт из $K_q^0(S)$, что $e_1^* \in [h^{-1}(k_1)]_2$. Заметим, любое ребро $e = \{r, r'\}$ графа $\mathfrak{G}$ обладает следующим свойством: если для некоторого $k \in K(S)$ выполнено $r \in h^{-1}(k)$, то также справедливо и включение $r' \in h^{-1}(k)$. Поскольку в силу второго соотношения леммы 6 выполнено $e_1^* \cap e_2^* \cap e_3^* \ne \emptyset$, имеем $e_1^*,\ e_2^*,\ e_3^* \in [h^{-1}(k_1)]_2$. Поскольку в силу третьего соотношения леммы 6 выполнено $e_1^* \cup e_2^* \cup e_3^* = R_q^0(T)$, имеем $R_q^0(T) \subseteq h^{-1}(k_1)$. Поэтому все 6 элементов множества $[R_q^0(T)]_2$ являются рёбрами графа G_q^0. При этом, очевидно, выполнено включение $[R_q^0(T)]_2 \subseteq E(T)$.

Покажем, что каждый из трёх подграфов

$$G_i^0 = \bigcup_{k \in K_i^0(S)} [h^{-1}(k)]_2, \qquad i \in J(T) \setminus \{q\},$$

графа $\mathfrak{G}$ содержит как минимум 1 ребро из множества $E(T)$. Рассмотрим произвольное $i \in J(T) \setminus \{q\}$, множество контактов $K_i^0(S)$ и семейство подмножеств $M(k) = h^{-1}(k) \cap R_i^0(T),\ k \in K_i^0(S)$, множества $R_i^0(T)$. Из первого свойства отображения h следует $\bigcup\limits_{k \in K_i^0(S)} M(k) = R_i^0(T)$. Поскольку $|K_i^0(S)| = l_i^0 \le 3$ и $|R_i^0(T)| = 4$, в силу принципа Дирихле найдётся такой контакт $a \in K_i^0(S)$, что $|M(a)| \ge 2$. Поэтому $|[M(a)]_2| \ge 1$. Ясно, что все элементы множества $[M(a)]_2$ являются рёбрами графа G_i^0, и выполнено включение $[M(a)]_2 \subseteq E(T)$.

Таким образом, в силу того, что четыре графа $G_i^0,\ i \in J(T)$ попарно не пересекаются, имеем $|E(T)| > 9$. Противоречие.
Лемма 12 доказана.

Лемма 13. Пусть все элементы верхней строки матрицы $\mathfrak{L}(S)$ не превосходят 3, и для некоторого $i \in \{1,2,3,4,5\}$ элемент l_i^1 нижней строки матрицы $\mathfrak{L}(S)$ также не превосходит 3. Тогда справедливо неравенство $|\widetilde{G_i^1}| \geq 2$.

Доказательство. Пусть $i \in \{1,2,3,4,5\}$ такое, что $l_i^1 \leq 3$. Оценим снизу величину $|\widetilde{G_i^1}|$. Учитывая, что $\widetilde{G_i^1} = G_i^1 \setminus (G_i^0)^*$ и $G_i^1 = \bigcup\limits_{k \in K_i^1(S)} [h^{-1}(k)]_2$, имеем

$$\left|\widetilde{G_i^1}\right| = \sum_{k \in K_i^1(S)} \left|[h^{-1}(k)]_2 \setminus (G_i^0)^*\right|.$$

Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: существует такой контакт $k \in K_i^1(S)$, что $|h^{-1}(k)| \geq 4$. Обозначим этот контакт k'. Предположим $|[h^{-1}(k')]_2 \setminus (G_i^0)^*| \leq 1$. Тогда, очевидно, найдётся такое 3-элементное множество $\Delta \subseteq h^{-1}(k')$, что $[\Delta]_2 \subseteq (G_i^0)^*$. Это противоречит тому, что в силу леммы 10 граф $(G_i^0)^*$ не содержит треугольников. Поэтому

$$\left|\widetilde{G_i^1}\right| \geq \left|[h^{-1}(k')]_2 \setminus (G_i^0)^*\right| \geq 2.$$

Случай 2: для любого контакта $k \in K_i^1(S)$ выполнено $|h^{-1}(k)| \leq 3$. В силу первого свойства отображения h имеет место равенство $\sum\limits_{k \in K_i^1(S)} |h^{-1}(k)| = |R_i^1| = 8$. Поэтому из $l_i^1 \leq 3$ следует $|K_i^1(S)| = 3$. Следовательно, для двух контактов $k_1, k_2 \in K_i^1(S)$ выполнено $|h^{-1}(k_1)| = |h^{-1}(k_2)| = 3$ и для одного $k_3 \in K_i^1(S)$ выполнено $|h^{-1}(k_3)| = 2$. Предположим $|[h^{-1}(k_1)]_2 \setminus (G_i^0)^*| = 0$ или $|[h^{-1}(k_2)]_2 \setminus (G_i^0)^*| = 0$. Тогда либо для треугольника $\Delta = h^{-1}(k_1)$ либо для треугольника $\Delta = h^{-1}(k_2)$ имеет место включение $[\Delta]_2 \subseteq (G_i^0)^*$. Это противоречит тому, что в силу леммы 12 граф $(G_i^0)^*$ не содержит треугольников. Поэтому

$$\left|\widetilde{G_i^1}\right| \geq \left|[h^{-1}(k_1)]_2 \setminus (G_i^0)^*\right| + \left|[h^{-1}(k_2)]_2 \setminus (G_i^0)^*\right| \geq 1 + 1 = 2.$$

Лемма 13 доказана.

Оценим снизу величину $|\mathfrak{G}|$. Заметим, в силу первого свойства отображения h все элементы матрицы $\mathfrak{L}(S)$ не меньше 1. Учитывая, что для элементов верхней строки этой матрицы выполнены неравенства

$$1 \leq l_1^0 \leq l_2^0 \leq l_3^0 \leq l_4^0 \leq l_5^0 \leq 3,$$

рассмотрим четыре возможные случая.

Случай 1: $l_1^0 = 1,\ \ l_2^0,\ l_3^0,\ l_4^0,\ l_5^0 \leq 3$. Как следствие леммы 11 имеем

$$|\mathfrak{G}| = \sum_{i=1}^{5} |G_i^0| + \sum_{i=1}^{5} |\widetilde{G_i^1}| \geq \sum_{i=1}^{5} |G_i^0| \geq 28 + 7 + 7 + 7 + 7 = 49 > 48.$$

Случай 2: $l_1^0 = l_2^0 = l_3^0 = 2$, l_4^0, $l_5^0 \leq 3$. Как следствие леммы 11 имеем

$$|\mathfrak{G}| = \sum_{i=1}^{5} |G_i^0| + \sum_{i=1}^{5} |\widetilde{G_i^1}| \geq \sum_{i=1}^{5} |G_i^0| \geq 12 + 12 + 12 + 7 + 7 = 50 > 48.$$

Случай 3: $l_1^0 = l_2^0 = 2$, $l_3^0 = l_4^0 = l_5^0 = 3$. Из равенств $l_1^0 + l_2^0 + l_3^0 + l_4^0 + l_5^0 = 13$ и $L(S) = 28$ следует, что для элементов нижней строки матрицы $\mathfrak{L}(S)$ выполнено равенство $l_1^1 + l_2^1 + l_3^1 + l_4^1 + l_5^1 = 15$. Поэтому из $l_1^0 \leq l_1^1$, $l_2^0 \leq l_2^1$, $l_3^0 \leq l_3^1$, $l_4^0 \leq l_4^1$, $l_5^0 \leq l_5^1$ следует, что среди l_1^1, l_2^1, l_3^1, l_4^1, l_5^1 найдутся по крайней мере три элемента, не превосходящие 3. Как следствие лемм 11 и 13 имеем

$$\sum_{i=1}^{5} |G_i^0| \geq 12 + 12 + 7 + 7 + 7 = 45, \qquad \sum_{i=1}^{5} |\widetilde{G_i^1}| \geq 2 + 2 + 2 = 6.$$

Поэтому

$$|\mathfrak{G}| = \sum_{i=1}^{5} |G_i^0| + \sum_{i=1}^{5} |\widetilde{G_i^1}| \geq 45 + 6 = 51 > 48.$$

Случай 4: $l_1^0 = 2$, $l_2^0 = l_3^0 = l_4^0 = l_5^0 = 3$. В этом случае матрица $\mathfrak{L}(S)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Как следствие лемм 11 и 13 имеем

$$\sum_{i=1}^{5} |G_i^0| \geq 12 + 7 + 7 + 7 + 7 = 40, \qquad \sum_{i=1}^{5} |\widetilde{G_i^1}| \geq 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10.$$

Поэтому

$$|\mathfrak{G}| = \sum_{i=1}^{5} |G_i^0| + \sum_{i=1}^{5} |\widetilde{G_i^1}| \geq 40 + 10 = 50 > 48.$$

Теорема 2 доказана.

3. Доказательство нижних оценок сложности в случае произвольного $n \neq 2^k$

В настоящем параграфе приводится упрощённое доказательство нижней оценки сложности, опубликованной в [2].

Теорема 3. Для линейной булевой функции $\varphi(x_1, ..., x_n)$ в классе π-схем справедлива следующая нижняя оценка сложности :

$$L_\pi(\varphi(x_1, ..., x_n)) \geq \begin{cases} n^2 + 2 & \text{для чётных } n \neq 2^k, \\ n^2 + 3 & \text{для нечётных } n \geq 5. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть S - произвольна π-схема, реализуюшая булеву функцию $\varphi(x_1, ..., x_n)$. Рассмотрим матрицу сложности этой π-схемы

$$\mathfrak{L}(S) = \begin{pmatrix} l_1^0 & \dots & l_n^0 \\ l_1^1 & \dots & l_n^1 \end{pmatrix}.$$

Введём следующие обозначения:

$$\mathfrak{L}^{(i)}(S) = \begin{pmatrix} l_1^0 & \dots & l_{i-1}^0 & \min\{l_i^0, l_i^1\} & l_{i+1}^0 & \dots & l_n^0 \\ l_1^1 & \dots & l_{i-1}^1 & \min\{l_i^0, l_i^1\} & l_{i+1}^1 & \dots & l_n^1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Через $L^{(i)}(S)$ обозначим сумму всех элементов матрицы $\mathfrak{L}^{(i)}(S)$.

Для произвольной матрицы $\mathfrak{L} = (l_i^\delta)$ с ненулевыми элементами пусть

$$\|\mathfrak{L}\|_{-1} = \sum_{i,\delta} \frac{1}{l_i^\delta}.$$

Лемма 14. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ справедливо неравенство

$$\|\mathfrak{L}^{(i)}(S)\|_{-1} \leq 4.$$

При этом, если не все элементы матрицы $\mathfrak{L}^{(i)}(S)$ являются степенями 2, то имеет место строгое неравенство.

Доказательство. Рассмотрим отображение Храпченко $h : R \to K(S)$ для функции $\varphi(x_1, ..., x_n)$ и π-схемы S.

Лемма 15. Для каждого $k \in K(S)$ справедливо равенство

$$|\widehat{h^{-1}(k)}| = |h^{-1}(k)|^2.$$

Доказательство. Пусть $i \in \{1, \ldots, n\},\ \delta \in \{0, 1, \}$. Рассмотрим множество R_i^δ и произвольное его подмножество M. Заметим, что для любых двух различных (0-1)-рёбер $r_1, r_2 \in M$ выполнено $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ (или другими словами (0-1)-рёбра $r_1,\ r_2$ не имеют общих концов). Поэтому справедливо равенство $|\widehat{M}| = |M|^2$. Таким образом, утверждение леммы 15 следует из первого свойства отображения h, в силу которого для каждого $k \in K(S)$ множество $h^{-1}(k)$ является подмножеством некоторого множества R_i^δ.
Лемма 15 доказана.

Лемма 16. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ справедливы включения

$$\bigcup_{k \in K_i^0(S)} \widehat{h^{-1}(k)} \subseteq \widehat{R_i^0}, \qquad \bigcup_{k \in K_i^1(S)} \widehat{h^{-1}(k)} \subseteq \widehat{R_i^1},$$

Доказательство. Утверждение леммы 16 является непосредственным следствием первого свойства отображения h.
Лемма 16 доказана.

Лемма 17. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ справедливо равенство

$$\left|\widehat{R_i^0} \cap \left(\bigcup_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}} \ \bigcup_{\delta \in \{0,1\}} \ \bigcup_{k \in K_j^\delta(S)} \widehat{h^{-1}(k)} \right)\right| = \left|\widehat{R_i^1} \cap \left(\bigcup_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}} \ \bigcup_{\delta \in \{0,1\}} \ \bigcup_{k \in K_j^\delta(S)} \widehat{h^{-1}(k)} \right)\right|.$$

Доказательство. В силу свойства 2 отображения h множества $\widehat{h^{-1}(k)},\ k \in K(S)$, попарно не пересекаются. Поэтому

$$\left|\widehat{R_i^0} \cap \left(\bigcup_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}} \ \bigcup_{\delta \in \{0,1\}} \ \bigcup_{k \in K_j^\delta(S)} \widehat{h^{-1}(k)} \right)\right| = \sum_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}} \ \sum_{\delta \in \{0,1\}} \ \sum_{k \in K_j^\delta(S)} \left|\widehat{R_i^0} \cap \widehat{h^{-1}(k)}\right|$$

$$\left|\widehat{R_i^1} \cap \left(\bigcup_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}} \ \bigcup_{\delta \in \{0,1\}} \ \bigcup_{k \in K_j^\delta(S)} \widehat{h^{-1}(k)} \right)\right| = \sum_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}} \ \sum_{\delta \in \{0,1\}} \ \sum_{k \in K_j^\delta(S)} \left|\widehat{R_i^1} \cap \widehat{h^{-1}(k)}\right|$$

В силу свойства 1 отображения h для любого $k \in K_j^\delta(S)$ выполнено включение $h^{-1}(k) \subseteq R_j^\delta$. Поэтому для доказательства леммы 17 достаточно доказать следующее утверждение: при $j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}$, $\delta \in \{0,1\}$, для любого $M \subseteq R_j^\delta$ справедливо равенство $|\widehat{R_i^0} \cap \widehat{M}| = |\widehat{R_i^1} \cap \widehat{M}|$.

Докажем это утверждение. Рассмотрим произвольное множество $M \subseteq R_j^\delta$. Из очевидных равенств

$$\widehat{R_i^0} = (N_0 \times N_1) \cap (X_i^1 \times X_i^0), \qquad \widehat{R_i^1} = (N_0 \times N_1) \cap (X_i^0 \times X_i^1)$$

следует

$$\widehat{R_i^0} \cap \widehat{M} = \widehat{M} \cap (X_i^1 \times X_i^0), \qquad \widehat{R_i^1} \cap \widehat{M} = \widehat{M} \cap (X_i^0 \times X_i^1).$$

Учитывая включение $M \subseteq R_j^\delta \subseteq (X_i^0 \times X_i^0) \cup (X_i^1 \times X_i^1)$ и тот факт, что (0-1)-рёбра из M не имеют общих концов, имеем

$$\left|\widehat{M} \cap (X_i^1 \times X_i^0)\right| = \left|M \cap (X_i^0 \times X_i^0)\right| \cdot \left|M \cap (X_i^1 \times X_i^1)\right| = \left|\widehat{M} \cap (X_i^0 \times X_i^1)\right|.$$

Лемма 17 доказана.

Лемма 18. Для каждого $i = 1,\ldots,n$ справедливы равенства

$$|\widehat{R_i^0}| = |\widehat{R_i^1}|, \qquad \widehat{R_i^0} \cap \widehat{R_i^1} = \emptyset.$$

Доказательство. Утверждение леммы 18 является непосредственным следствием двух очевидных равенств

$$\widehat{R_i^0} = (N_0 \times N_1) \cap (X_i^1 \times X_i^0), \qquad \widehat{R_i^1} = (N_0 \times N_1) \cap (X_i^0 \times X_i^1).$$

Лемма 18 доказана.

Учитывая, что в силу свойства 2 отображения h множества $\widehat{h^{-1}(k)}$, $k \in K(S)$, попарно не пересекаются, как следствие лемм 15 - 18 имеем

$$\left|N_0 \times N_1\right| = \left|\widehat{R_i^0}\right| + \left|\widehat{R_i^1}\right| + \left|(N_0 \times N_1) \setminus (\widehat{R_i^0} \cup \widehat{R_i^1})\right|$$

$$\geq 2 \cdot \max\left\{ \left|\widehat{R_i^0} \cap \left(\bigcup_{k \in K(S)} \widehat{h^{-1}(k)}\right)\right|, \left|\widehat{R_i^1} \cap \left(\bigcup_{k \in K(S)} \widehat{h^{-1}(k)}\right)\right| \right\}$$

$$+ \left|\left((N_0 \times N_1) \setminus (\widehat{R_i^0} \cup \widehat{R_i^1})\right) \cap \left(\bigcup_{k \in K(S)} \widehat{h^{-1}(k)}\right)\right|$$

$$= 2 \cdot \max\left\{ \left|\bigcup_{k \in K_i^0(S)} \widehat{h^{-1}(k)}\right|, \left|\bigcup_{k \in K_i^1(S)} \widehat{h^{-1}(k)}\right| \right\}$$

$$+ \left|\widehat{R_i^0} \cap \left(\bigcup_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}} \bigcup_{\delta \in \{0,1\}} \bigcup_{k \in K_j^\delta(S)} \widehat{h^{-1}(k)}\right)\right|$$

$$+ \left|\widehat{R_i^1} \cap \left(\bigcup_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}} \bigcup_{\delta \in \{0,1\}} \bigcup_{k \in K_j^\delta(S)} \widehat{h^{-1}(k)}\right)\right|$$

$$+ \left|\left((N_0 \times N_1) \setminus (\widehat{R_i^0} \cup \widehat{R_i^1})\right) \cap \left(\bigcup_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}} \bigcup_{\delta \in \{0,1\}} \bigcup_{k \in K_j^\delta(S)} \widehat{h^{-1}(k)}\right)\right|$$

$$= 2\cdot\max\Big\{ \Big|\bigcup_{k\in K_i^0(S)} \widehat{h^{-1}(k)}\Big|,\ \Big|\bigcup_{k\in K_i^1(S)} \widehat{h^{-1}(k)}\Big| \Big\} + \Big|\bigcup_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}}\ \bigcup_{\delta\in\{0,1\}}\ \bigcup_{k\in K_j^\delta(S)} \widehat{h^{-1}(k)}\Big|$$

$$= 2\cdot\max\Big\{ \sum_{k\in K_i^0(S)} \Big|\widehat{h^{-1}(k)}\Big|,\ \sum_{k\in K_i^1(S)} \Big|\widehat{h^{-1}(k)}\Big| \Big\} + \sum_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}}\ \sum_{\delta\in\{0,1\}}\ \sum_{k\in K_j^\delta(S)} \Big|\widehat{h^{-1}(k)}\Big|$$

$$= 2\cdot\max\Big\{ \sum_{k\in K_i^0(S)} |h^{-1}(k)|^2,\ \sum_{k\in K_i^1(S)} |h^{-1}(k)|^2 \Big\} + \sum_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}}\ \sum_{\delta\in\{0,1\}}\ \sum_{k\in K_j^\delta(S)} |h^{-1}(k)|^2$$

Рассмотрим $2n$ неравенств

$$|K_i^\delta(S)| \sum_{k\in K_i^\delta(S)} |h^{-1}(k)|^2 \geq \Big(\sum_{k\in K_i^\delta(S)} |h^{-1}(k)|\Big)^2, \quad i = 1,\dots,n, \quad \delta = 0,1.$$

Все они представляют из себя частный случай неравенства Коши-Буняковского. Отметим, что $|K_i^\delta(S)| = l_i^\delta$ и $\sum\limits_{k\in K_i^\delta(S)} |h^{-1}(k)| = |R_i^\delta| = 2^{n-2}$. Поэтому некоторое из этих неравенств может обратиться в равенство только в том случае, когда 2^{n-2} делится нацело на соответствующее l_i^δ. Таким образом, если l_i^δ не является степенью 2, то соответствующее неравенство заведомо строгое. Перепишем эти неравенства в виде

$$\sum_{k\in K_i^\delta(S)} |h^{-1}(k)|^2 \geq \frac{(2^{n-2})^2}{l_i^\delta}, \qquad i = 1,\dots,n, \quad \delta = 0,1.$$

Таким образом, имеем

$$(2^{n-1})^2 = |N_0 \times N_1|$$

$$\geq 2\cdot\max\Big\{ \sum_{k\in K_i^0(S)} |h^{-1}(k)|^2,\ \sum_{k\in K_i^1(S)} |h^{-1}(k)|^2 \Big\} + \sum_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}}\ \sum_{\delta\in\{0,1\}}\ \sum_{k\in K_j^\delta(S)} |h^{-1}(k)|^2$$

$$\geq 2\cdot\frac{(2^{n-2})^2}{\min\{l_i^0, l_i^1\}} + \sum_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}}\ \sum_{\delta\in\{0,1\}}\ \sum_{k\in K_j^\delta(S)} \frac{(2^{n-2})^2}{l_i^\delta} \quad = \quad (2^{n-2})^2\cdot\|\mathfrak{L}^{(i)}(S)\|_{-1}.$$

Следовательно

$$\|\mathfrak{L}^{(i)}(S)\|_{-1} \leq \frac{(2^{n-1})^2}{(2^{n-2})^2} = 4.$$

Заметим, что элементы l_i^δ, $i = 1,\dots,n$, $\delta = 0,1$, матрицы $\mathfrak{L}(S)$ за исключением быть может одного, равного $\max\{l_i^0, l_i^1\}$, являются элементами матрицы $\mathfrak{L}^{(i)}(S)$. Поэтому, если не все элементы матрицы $\mathfrak{L}^{(i)}(S)$ являются степенями 2, то последнее неравенство является строгим.
Лемма 14 доказана.

Введём следующие обозначения. Для произвольных $L, p \in \mathbb{Z}$, $\ L \geq p > 0$, пусть

$$\mathfrak{M}(p, L) = \{\overrightarrow{v} = (v_1,\dots,v_p) \in \mathbb{Z}^p \mid v_1 \geq,\dots,\geq v_p \geq 1,\ \sum_{i=1}^p v_i = L\}.$$

Через $\overrightarrow{\mathfrak{m}}(p,L)$ обозначим такой вектор из множества $\mathfrak{M}(p,L)$, компоненты которого различаются друг от друга не более чем на 1. Этот вектор мы называем максимально равномерным. Очевидно, справедливо равенство

$$\overrightarrow{\mathfrak{m}}(p,L) = (\underbrace{\lceil L/p\rceil,\ldots,\lceil L/p\rceil}_{L-p\lfloor L/p\rfloor},\ \underbrace{\lfloor L/p\rfloor,\ldots,\lfloor L/p\rfloor}_{p-(L-p\lfloor L/p\rfloor)}).$$

Для произвольного вектора $\overrightarrow{v} = (v_1,\ldots,v_p) \in \mathfrak{M}(p,L)$ пусть

$$\|\overrightarrow{v}\|_{-1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{v_i}.$$

Лемма 19. Для любого вектора $\overrightarrow{v} \in \mathfrak{M}(p,L)$ справедливо неравенство

$$\|\overrightarrow{v}\|_{-1} \geq \|\overrightarrow{\mathfrak{m}}(p,L)\|_{-1}.$$

При этом, если $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{\mathfrak{m}}(p,L)$, то имеет место строгое неравенство.

Доказательство. На множестве векторов $\overrightarrow{v} = (v_1,\ldots,v_p)$ с целыми компонентами для каждой пары номеров $i,j,\ 1 \leq i < j \leq p$, определим операцию $O_{i,j}$:

$$O_{i,j}(\overrightarrow{v}) = (v_1,\ldots,v_{i-1},\ v_i+1,\ v_{i+1},\ldots,v_{j-1},\ v_j-1,\ v_{j+1},\ldots,v_p)$$

Мы называем $O_{i,j}$ операцией переноса единицы из разряда с номером j в разряд с номером i.

Заметим, если $\overrightarrow{v} \in \mathfrak{M}(p,L)$ и $O_{i,j}(\overrightarrow{v}) \in \mathfrak{M}(p,L)$, то

$$\|O_{i,j}(\overrightarrow{v})\|_{-1} - \|\overrightarrow{v}\|_{-1} = \frac{1}{v_i+1} - \frac{1}{v_i} + \frac{1}{v_j-1} - \frac{1}{v_j} = \frac{1}{v_j(v_j-1)} - \frac{1}{(v_i+1)v_i} > 0.$$

Нетрудно понять, что для любого, отличного от $\overrightarrow{\mathfrak{m}}(p,L)$, вектора $\overrightarrow{v} \in \mathfrak{M}(p,L)$ найдётся такая последовательность операций $O_{i,j}$, которая переведёт вектор $\overrightarrow{\mathfrak{m}}(p,L)$ в вектор $\overrightarrow{v}$, не выводя при этом за пределы множества $\mathfrak{M}(p,L)$. Лемма 19 доказана.

Лемма 20. Для любых $L \geq p > 0$ справедливо неравенство

$$\|\overrightarrow{\mathfrak{m}}(p,L)\|_{-1} > \|\overrightarrow{\mathfrak{m}}(p,L+1)\|_{-1}.$$

Доказательство. Поскольку сумма компонент вектора $\overrightarrow{\mathfrak{m}}(p,L+1)$ на 1 больше суммы компонент вектора $\overrightarrow{\mathfrak{m}}(p,L)$, между этими векторами имеется следующая взаимосвязь: пусть вектор $\overrightarrow{\mathfrak{m}}(p,L)$ имеет вид

$$\overrightarrow{\mathfrak{m}}(p,L) = (\underbrace{m+1,\ldots,m+1}_{y},\ \underbrace{m,\ldots,m}_{x}), \quad x > 0,$$

тогда вектор $\overrightarrow{\mathfrak{m}}(p,L+1)$ имеет вид

$$\overrightarrow{\mathfrak{m}}(p,L+1) = (\underbrace{m+1,\ldots,m+1}_{y+1},\ \underbrace{m,\ldots,m}_{x-1}).$$

Поэтому справедливо неравенство

$$\|\overrightarrow{\mathfrak{m}}(p,L)\|_{-1} - \|\overrightarrow{\mathfrak{m}}(p,L+1)\|_{-1} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} > 0.$$

Лемма 20 доказана.

Лемма 21. При чётном $n \neq 2^k$ компоненты вектора $\overrightarrow{\mathfrak{m}}(2n, n^2)$ не являются степенями 2, и справедливо равенство

$$\|\overrightarrow{\mathfrak{m}}(2n, n^2)\|_{-1} = 4.$$

Доказательство. Из чётности n следует $\lfloor n^2/2n \rfloor = n/2$. Поэтому

$$\overrightarrow{\mathfrak{m}}(2n, n^2) = (\underbrace{n/2, \ldots, n/2}_{2n}).$$

Из $n \neq 2^k$ следует, что $n/2$ не являются степенью 2. Очевидно, справедливо равенство

$$\|\overrightarrow{\mathfrak{m}}(2n, n^2)\|_{-1} = 2n \cdot \frac{2}{n} = 4.$$

Лемма 21 доказана.

Лемма 22. При нечётном $n \geq 5$ не все компоненты вектора $\overrightarrow{\mathfrak{m}}(2n, n^2 + 1)$ являются степенями 2, и справедливо равенство

$$\|\overrightarrow{\mathfrak{m}}(2n, n^2 + 1)\|_{-1} = 4.$$

Доказательство. Из нечётности n следует

$$\lceil (n^2 + 1)/2n \rceil = (n + 1)/2, \qquad \lfloor (n^2 + 1)/2n \rfloor = (n - 1)/2.$$

Поэтому

$$\overrightarrow{\mathfrak{m}}(2n, n^2 + 1) = (\underbrace{(n + 1)/2, \ldots, (n + 1)/2}_{n+1}, \underbrace{(n - 1)/2, \ldots, (n - 1)/2}_{n-1}).$$

Из $n \geq 5$ следует $(n - 1)/2 > 1$. Из $(n + 1)/2 - (n - 1)/2 = 1$ следует, что либо $(n + 1)/2$ либо $(n - 1)/2$ не является степенью 2. Очевидно, справедливо равенство

$$\|\overrightarrow{\mathfrak{m}}(2n, n^2 + 1)\|_{-1} = (n + 1) \cdot \frac{2}{n + 1} + (n - 1) \cdot \frac{2}{n - 1} = 4.$$

Лемма 22 доказана.

Введём обозначение. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ через $\overrightarrow{\mathfrak{L}}^{(i)}(S)$ обозначим такой вектор $\overrightarrow{v} = (v_1, \ldots, v_{2n})$, компоненты которого суть выписанные в невозрастающем порядке элементы матрицы $\mathfrak{L}^{(i)}(S)$.

Очевидно, выполнено равенство $\|\mathfrak{L}^{(i)}(S)\|_{-1} = \|\overrightarrow{\mathfrak{L}}^{(i)}(S)\|_{-1}$.

Лемма 23. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ справедливо неравенство

$$\|\overrightarrow{\mathfrak{L}}^{(i)}(S)\|_{-1} \geq \|\overrightarrow{\mathfrak{m}}(2n, L^{(i)}(S))\|_{-1}.$$

При этом, если $\overrightarrow{\mathfrak{L}}^{(i)}(S) \neq \overrightarrow{\mathfrak{m}}(2n, L^{(i)}(S))$, то имеет место строгое неравенство.

Доказательство. Из определений вектора $\overrightarrow{\mathfrak{L}}^{(i)}(S)$ и множества $\mathfrak{M}(p, L)$ следует включение $\overrightarrow{\mathfrak{L}}^{(i)}(S) \in \mathfrak{M}(2n, L^{(i)}(S))$. Поэтому утверждение леммы 23 является непосредственным следствием леммы 19.

Лемма 23 доказана.

Доказательство теоремы 3 проведём от противного.

Рассмотрим случай, когда $n \neq 2^k$ - чётное число. Предположим $L(S) \leq n^2 + 1$. Выберем такое $i \in \{1, \ldots, n\}$, что $L^{(i)}(S) \leq n^2$. Если $L(S) \leq n^2$, это неравенство верно для любого i. Если $L(S) = n^2 + 1$, такое i найдётся в силу нечётности числа $n^2 + 1$. Из лемм 23, 20, 21 следует

$$\|\mathfrak{L}^{(i)}(S)\|_{-1} = \|\overrightarrow{\mathfrak{L}}^{(i)}(S)\|_{-1} \geq \|\overrightarrow{\mathfrak{m}}(2n, L^{(i)}(S))\|_{-1} \geq \|\overrightarrow{\mathfrak{m}}(2n, n^2)\|_{-1} = 4.$$

При этом, если $\overrightarrow{\mathfrak{L}}^{(i)}(S) \neq \overrightarrow{\mathfrak{m}}(2n, L^{(i)}(S))$ или $L^{(i)}(S) < n^2$, то в силу лемм 23, 20 справедливо строгое неравенство

$$\|\mathfrak{L}^{(i)}(S)\|_{-1} > \|\overrightarrow{\mathfrak{m}}(2n, n^2)\|_{-1} = 4.$$

Это противоречит неравенству $\|\mathfrak{L}^{(i)}(S)\|_{-1} \leq 4$ из леммы 14.

Если же $\overrightarrow{\mathfrak{L}}^{(i)}(S) = \overrightarrow{\mathfrak{m}}(2n, L^{(i)}(S))$ и $L^{(i)}(S) = n^2$, то $\|\mathfrak{L}^{(i)}(S)\|_{-1} = 4$, и в силу леммы 21 элементы матрицы $\mathfrak{L}^{(i)}(S)$ не являются степенями 2. Это противоречит тому, что в силу леммы 14 в этом случае $\|\mathfrak{L}^{(i)}(S)\|_{-1} < 4$.

Следовательно наше предположение неверно, и значит для чётного $n \neq 2^k$ справедливо неравенство $L(S) \geq n^2 + 2$.

Рассмотрим случай, когда $n \geq 5$ - нечётное число. Предположим $L(S) \leq n^2 + 2$. Выберем такое $i \in \{1, \ldots, n\}$, что $L^{(i)}(S) \leq n^2 + 1$. Если $L(S) \leq n^2 + 1$, это неравенство верно для любого i. Если $L(S) = n^2 + 2$, такое i найдётся в силу нечётности числа $n^2 + 2$. Из лемм 23, 20, 22 следует

$$\|\mathfrak{L}^{(i)}(S)\|_{-1} = \|\overrightarrow{\mathfrak{L}}^{(i)}(S)\|_{-1} \geq \|\overrightarrow{\mathfrak{m}}(2n, L^{(i)}(S))\|_{-1} \geq \|\overrightarrow{\mathfrak{m}}(2n, n^2 + 1)\|_{-1} = 4.$$

При этом, если $\overrightarrow{\mathfrak{L}}^{(i)}(S) \neq \overrightarrow{\mathfrak{m}}(2n, L^{(i)}(S))$ или $L^{(i)}(S) < n^2 + 1$, то в силу лемм 23, 20 справедливо строгое неравенство

$$\|\mathfrak{L}^{(i)}(S)\|_{-1} > \|\overrightarrow{\mathfrak{m}}(2n, n^2 + 1)\|_{-1} = 4.$$

Это противоречит неравенству $\|\mathfrak{L}^{(i)}(S)\|_{-1} \leq 4$ из леммы 14.

Если же $\overrightarrow{\mathfrak{L}}^{(i)}(S) = \overrightarrow{\mathfrak{m}}(2n, L^{(i)}(S))$ и $L^{(i)}(S) = n^2 + 1$, то $\|\mathfrak{L}^{(i)}(S)\|_{-1} = 4$, и в силу леммы 22 не все элементы матрицы $\mathfrak{L}^{(i)}(S)$ являются степенями 2. Это противоречит тому, что в силу леммы 14 в этом случае $\|\mathfrak{L}^{(i)}(S)\|_{-1} < 4$.

Следовательно наше предположение неверно, и значит для нечётного $n \geq 5$ справедливо неравенство $L(S) \geq n^2 + 3$.
Теорема 3 доказана.

Список литературы

[1] Д.Ю. Черухин, *К вопросу о логическом представлении счётчика чётности*, Неформальная наука, **2** (2008), 14–23.

[2] К.Л. Рычков, *О нижних оценках сложности параллельно-последовательных контактных схем, реализующих линейные булевы функции*, Сибирский журнал исследования операций, **1**:4 (1994), 33–52. MR1340149

[3] С.В. Яблонский, *Реализация линейной функции в классе П-схем*, ДАН СССР, **94**:5 (1954), 805–806. MR0063941

[4] В.М. Храпченко, *О сложности реализации линейной функции в классе П-схем*, Матем. заметки, **9**:1 (1971), 35–40. Zbl 0223.68009

[5] Б.А. Субботовская, *О реализации линейных функций формулами в базисе* $\vee$, $\wedge$, $^-$, ДАН СССР, **136**:3 (1961), 553–555. Zbl 0100.01002

[6] Р.Г. Нигматулин, *Сложность булевых функций*, М.: Наука, 1991. MR1156961

Константин Леонидович Рычков
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: rychkov@math.nsc.ru